Programación Matemática y Software (2025) 17(3): 12-24. ISSN: 2007-3283

Herramientas para abordar fundamentos y técnicas de conteo en probabilidad

Tools for Addressing the Fundamentals and Counting Techniques in Probability

María Cristina Medel López*, Francisco Solano Tajonar Sanabria
Fernando Velasco Luna y Hugo Adán Cruz Suárez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Puebla, México
*ml223470377@alm.buap.mx

PALABRAS CLAVE:

Educación, Enfoques de la Probabilidad, Técnicas de Conteo, Software

RESUMEN

La Probabilidad y la Estadística son dos áreas de investigación y de aplicación de las matemáticas aplicadas. Su utilidad se presenta en diferentes campos de las ciencias, como, por ejemplo: las formales y experimentales, la tecnología (diseño, desarrollo y monitoreo de proyectos tecnológicos) e incluso en el sector industrial y productivo (calidad y mantenimiento de componentes o sistemas), lo que explica la relevancia de su enseñanza, así como de su aprendizaje. Sin embargo, durante la educación media superior y superior, resulta tedioso y hasta complicado aplicar las teorías para la resolución de problemas prácticos en cada una de las áreas mencionadas. El primer obstáculo que se presenta en los estudiantes, es que no saben contar, con esto se quiere decir que desconocen el uso de las técnicas de conteo para la solución de problemas en probabilidad. En este trabajo se discuten diferentes problemas los cuales le permitirán al alumno en sus cursos de probabilidad, comprender de mejor forma la importancia de esta área. Además, se propone el uso de herramientas matemáticas del tipo software libre como son: WolframAlpha, GeoGebra y Excel, esto, con la finalidad de apoyar el entendimiento del uso de técnicas de conteo en la teoría de probabilidad.

KEYWORDS:

Education, Probability Approaches, Counting Techniques, Software

ABSTRACT

Probability and Statistics are two areas of research and application of applied mathematics. They are useful in different fields of science, such as formal and experimental science, technology (design, development and monitoring of technological projects) and even in the industrial and productive sector (quality and maintenance of components or systems), which explains the relevance of their teaching, as well as their learning. However, during high school and higher education, it is tedious and even complicated to apply theories to solve practical problems in each of the areas mentioned. The first obstacle that students face is that they do not know how to count, which means that they do not know how to use counting techniques to solve probability problems. In this work, different problems are discussed which will allow students to better understand the importance of this area in their probability courses. In addition, the use of free software-type mathematical tools such as WolframAlpha, GeoGebra and Excel is proposed, to support the understanding of the use of counting techniques in probability theory.

• Recibido: 8 de noviembre de 2024 • Aceptado: 16 de marzo de 2025 • Publicado en línea: 1 de octubre de 2025

DOI: 10.30973/progmat/2025.17.3/2

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es que el alumno conozca las técnicas de conteo y tenga la capacidad de aplicarlas en la resolución de problemas dentro y fuera del área de probabilidad. En la sección 2 se presentan los diferentes enfoques de la probabilidad: enfoque clásico, enfoque frecuentista o frecuencial y la probabilidad axiomática, establecida por Andréi Kolmogórov. En la sección 3 se revisan los principios básicos de conteo: el aditivo y el multiplicativo. En la sección 4 se abordan las técnicas de conteo junto con ejemplos en los que se utilizan los paquetes y funciones específicos de software libre: WolframAlpha, GeoGebra y Excel, se incluye información acerca de las ventajas y limitaciones correspondientes a cada uno. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

Contar consiste en enumerar elementos de un conjunto, se habla de la cardinalidad de un conjunto como el número de elementos que contiene, el cual puede ser finito, infinito y numerable o infinito y no numerable. La introducción a la teoría de probabilidad recurre a ejemplos en los que se valora la probabilidad de un suceso como el cociente del número de las diferentes formas que tiene de ocurrir dicho suceso sobre el número total de resultados posibles para un experimento aleatorio, por ejemplo, en el lanzamiento de dados o volados, lo cual corresponde a un enfoque clásico tal como se definirá en la sección 2.1.

Los ejemplos y ejercicios aumentan de dificultad al incluir condiciones y situaciones más complejas, como el número de formas en que se pueden tomar objetos de un conjunto, formas distintas de repartir recursos o recorrer rutas, situaciones en las que el orden es relevante y otras en las que no, en las que hay elementos repetidos y en las que no, condiciones que al no tomarse en cuenta de forma correcta generan errores en los cálculos finales, por lo tanto, es necesario que los estudiantes comprendan y empleen de forma adecuada las diferentes técnicas de conteo, que tienen de fondo principios básicos como el multiplicativo y el aditivo.

Los ejercicios para determinar probabilidades en espacios muestrales finitos son enunciados que requieren una interpretación del lenguaje común al lenguaje matemático, la dificultad que tienen los estudiantes en desarrollar dichas habilidades se acentúa aún más en estudiantes de ingeniería y del área económico-administrativas, en comparación a estudiantes del área de ciencias exactas . Una vez que el estudiante interpreta el problema y plantea las operaciones y técnicas de conteo necesarias, la resolución de las operaciones puede ser correcta o incorrecta, por un error de escritura, omisión y adición de un término.

La presente propuesta consiste en introducir el uso de paquetes o funciones que le permitan al estudiante resolver correctamente los ejercicios que involucran el uso de técnicas de conteo, al hacer más eficientes ciertos cálculos, y de esa forma priorizar el trabajo sobre el desarrollo de la comprensión e interpretación del lenguaje matemático y la teoría involucrada.

2. ENFOQUES DE LA TEORÍA DE PROBABILIDAD

El desarrollo de la teoría de probabilidad tiene como antecedentes el enfoque clásico y el frecuencial, posteriormente Andréi Kolmogórov, hace una axiomatización de la teoría. El presente trabajo se dirige a estudiantes de nivel superior y medio superior, por lo que, se considera que es relevante que el alumnado posea conocimiento de dichos enfoques, para favorecer un aprendizaje significativo que conecte los nuevos conocimientos con los que ha desarrollado en cursos anteriores, la confusión alrededor del concepto de probabilidad representa uno de los obstáculos en la enseñanza de la materia [8]. Para ello se presentan las siguientes definiciones [1, 2, 6, 9].

- Experimento: es aquel proceso, ejercicio, práctica o fenómeno observable que admite repetición bajo las mismas condiciones.
- Experimento Aleatorio (ε): es un experimento que si bien, puede ser repetido bajo las mismas condiciones, presenta una variabilidad en los resultados que impide anticipar cuál será el resultado observado.
- Espacio muestral o Muestra (Ω): Es el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio ε.
- Evento: Es un subconjunto del espacio muestral Ω, usualmente denotado con letras mayúsculas: A, B, C, etcétera.
- Espacio muestral equiprobable: Dado un experimento aleatorio ε con espacio muestral finito Ω, este se denomina equiprobable si todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 1. Sea ε el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado honesto y observar el resultado que ocurre. Se obtiene que el especio muestral es Ω={1,2,3,4,5,6}, un evento puede ser aquel que consta de la ocurrencia de un número par; A={2,4,6}, su espacio muestral es equiprobable ya que cada uno de los 6 elementos del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Con lo anterior se presentan los enfoques de la teoría de probabilidad.

2.1. ENFOQUE CLÁSICO

Girolamo Cardano (1501-1576) se desempeñó como médico, uno de sus intereses fue la resolución de problemas relacionados con los juegos de azar, los cuales generalmente involucraban objetos tales como monedas, dados, loterías, etcétera, debido a ello, invirtió considerable tiempo en observar y reflexionar acerca de los juegos en los que participaban los parroquianos y las problemáticas que tenían [5]. Reconoció una regularidad existente en la ocurrencia de resultados simples al emplear objetos simétricos o lo que actualmente se denomina muestreo aleatorizado.

En la sección previa se define la equiprobabilidad de un espacio muestral, es claro que Cardano no poseía dicho nivel de formalidad, sin embargo, en su publicación póstuma “Liber de Ludo Alae”, sí plantea nociones y resultados que corresponden a tales conceptos, es por ello por lo que se le atribuye a él lo que se denomina enfoque clásico, el cual se define como sigue [6, 9].

Enfoque clásico de probabilidad. Sea ε un experimento aleatorio cuyo espacio muestral asociado Ω es equiprobable y finito, la probabilidad de que ocurra el evento A se define como en (1):

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{Casos\ favorables}{Número\ total\ de\ casos} \quad (1)$$

En probabilidad clásica se hace una suposición de equiprobabilidad y se calcula la probabilidad antes de la experimentación, es por ello que también se denomina **probabilidad a priori**.

Ejemplo 2. Una compañía de fondo mutualista ofrece a sus clientes varios fondos diferentes: uno de mercado de dinero, tres fondos diferentes de bonos (a corto, mediano y largo plazo), dos de acciones (riesgo moderado y alto) y uno balanceado. Entre los clientes que poseen acciones en uno solo de los fondos, el número de clientes en los diferentes fondos son como en la Tabla 1 [2]:

Tabla 1. Datos para ejemplo de probabilidad clásica.

Fondo	Clientes
Mercado de dinero	30
Bono a corto plazo	40
Bono a mediano plazo	25
Bono a largo plazo	10
Acciones de alto riesgo	27
Acciones de riesgo moderado	65
Fondo balanceado	15

Se selecciona al azar un cliente que tenga acciones en sólo uno de los fondos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga acciones en un fondo de bonos?

Solución. Como todos los clientes considerados en la tabla tienen la misma posibilidad de ser seleccionados, sea A={*Elegir un cliente de fondo de bonos*}, de acuerdo con (1) se cumple:

$$P(A)=\frac{40+25+10}{250}=0.3$$

Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un cliente con acciones en un fondo de bonos es 0.3.

2.2. ENFOQUE FRECUENCIAL

En este enfoque, dado un experimento aleatorio ε con espacio muestral Ω, se determina la probabilidad de un evento $A\subseteq\Omega$ con base en la proporción de veces que se observa la ocurrencia de A en un determinado número de repeticiones del experimento ε. No hay implícita ninguna suposición previa de equiprobabilidad y los cálculos de probabilidad se basan solo en las observaciones experimentales, por estos motivos se denomina **probabilidad a posteriori**.

La observación y recopilación de resultados son necesarios para determinar los valores de probabilidad de un evento A, la cual queda expresada en términos de lo que se denomina frecuencia relativa [6, 9].

Frecuencia relativa. Sea A un evento de un experimento aleatorio ε, dado un número de n repeticiones del experimento ε, la frecuencia relativa de A denotada como f_A es como en (2):

$$f_A=\frac{n_A}{n}=\frac{Num.\,de\,veces\,que\,ocurre\,A}{Num.\,total\,de\,rep.\,del\,experimento} \quad (2)$$

Sea A un evento, si se considera a f_A basada en n repeticiones del experimento como una función de n, ésta se aproxima a la probabilidad del evento A, es decir, $P(A)$, conforme $n\to\infty$. Esta propiedad surge con un carácter intuitivo, y se demostró cuando se formalizó la teoría de probabilidad con el resultado llamado Ley de los grandes números [6].

De esta forma se explica el motivo por el cual el enfoque frecuencial depende del número de repeticiones del ε y las observaciones en cada una de ellas. Las observaciones son datos que se pueden obtener de registros históricos o también de la simulación computacional. Por ejemplo, lenguajes de programación libres como *Python*, cuentan con una amplia biblioteca de funciones que generan números pseudoaleatorios y permiten diseñar simulaciones de diferente tipo.

Ejemplo 3. Dos jugadores A y B lanzan dos dados, cada uno tiene 5 fichas, si la suma de los dados es mayor que 7, el jugador A toma una ficha de su oponente, si no, el jugador B toma una ficha de su oponente, gana el primero en quedarse con todas las fichas. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane?

Solución. Es posible determinar una solución de forma analítica como se ve en [1], sin embargo, es un ejercicio que también se puede abordar de forma frecuencial, al repetir el juego un número determinado de veces y obtener la frecuencia relativa del evento A={*el jugador* A *gana*}. Con ayuda de una extensión del lenguaje de programación Python en GeoGebra [4] se escribe un código que simule el juego 5,000 veces, el código y los resultados de la simulación se ven en la Figura 1.

De 5,000 simulaciones del juego, el jugador A ganó 1186 veces, la frecuencia relativa del evento A es de 0.2372, y esta se considera la probabilidad frecuencial.

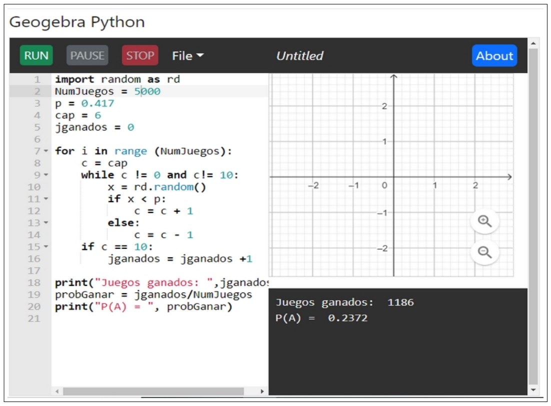


Figura 1. Simulación en Python de 5,000 repeticiones del juego, Ejemplo 3 (elaboración propia).

2.3. DESARROLLO AXIOMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

En 1933 Andréi Kolmogórov publica su obra, los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad, con la cuál daba formalidad a los resultados y trabajos que existían hasta ese momento en probabilidad, dichos fundamentos consideraban dos importantes áreas de la matemática: la Teoría de Conjuntos y Teoría de la Medida. La probabilidad de un evento, es definida, así como una medida, para un elemento de una familia de subconjuntos de un conjunto total Ω.

Lo anterior corresponde a la manera en la que se define un evento bajo los enfoques clásico y frecuencial, un evento A es un subconjunto del espacio muestral Ω, el cual contiene a todos los posibles resultados del experimento ε. Pero formalmente A no es arbitrario, pertenece a una familia de subconjuntos que cumple la definición de σ-álgebra [1].

σ-álgebra. Es una colección F de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω, que satisface las siguientes propiedades:

- $\Omega \in F$.
- Si $A \in F$, entonces $A^C \in F$.
- Si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una sucesión numerable de elementos de F, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in F.$$

Luego, sea F una σ-álgebra definida sobre el espacio muestral Ω, a la pareja (Ω, F) se le denomina espacio de medida, en el que se define una medida de probabilidad.

Medida de probabilidad. Una función real $P: F \to [0,1]$, con F una σ-álgebra, se dice que es una medida de probabilidad si satisface lo siguiente [6].

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, para todo $A \in F$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Sean $A, B \in F$ eventos mutuamente excluyentes, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Es aditiva numerable, esto significa que, si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de eventos tal que $A_i \cup A_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$, entonces,

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

A la terna (Ω, F, P), se le llama espacio de probabilidad. Por medio de esta axiomatización, es posible demostrar formalmente diferentes resultados como los de la Proposición 1, detalles en [2].

Proposición 1. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y sean, A, B, C eventos definidos sobre este espacio, entonces se cumple lo siguiente:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leqslant P(B)$.
- Sean A, B eventos cualesquiera (no necesariamente disjuntos) entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3. PRINCIPIOS DE LAS TÉCNICAS DE CONTEO

En trabajos de investigación recientes [5,7,8] y en referencias correspondientes a la introducción a la teoría de probabilidad [1,2,3,6,9] se indica comenzar el estudio de las técnicas de conteo a partir de los principios multiplicativo y aditivo.

3.1. PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si, continuando el procedimiento, un segundo evento se puede realizar de n_2 maneras diferentes, y así sucesivamente hasta el k-ésimo evento que puede realizarse de n_k maneras distintas, entonces, el número de maneras en que dichos eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto indicado en (3).

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k \qquad (3)$$

el cual recibe el nombre de principio multiplicativo.

Una forma en la que el estudiante pueda entender el uso de este principio es a través de problemas que se razonan como una secuencia de pasos, es decir, formas diferentes de efectuar el paso 1, seguido de formas diferentes de realizar el paso 2 y así sucesivamente u organizando sus operaciones en un arreglo horizontal, como llenado de casillas. Las aplicaciones de estos problemas pueden ser: generación de placas, códigos de acceso, selección de un boleto ganador por medio de tómbolas en un sorteo, etc.

Ejemplo 4. Un producto se arma en tres etapas. En la primera etapa hay 5 líneas de armado, en la segunda etapa hay 4 líneas de armado y en la tercera etapa hay 6 líneas de armado ¿De cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de armado? [6].

Solución. De acuerdo con el principio multiplicativo se considera el número de formas diferentes en que puede realizarse cada etapa y se calcula su producto, es decir, $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$, formas distintas, tal como se ve en la Figura 2.

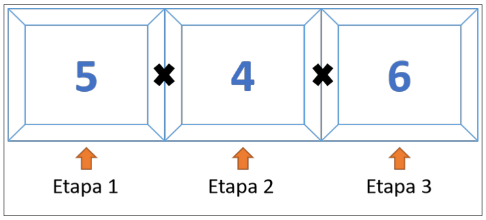


Figura 2. Para aplicar el principio multiplicativo las operaciones se suelen acomodar como si fueran casillas (elaboración propia).

Del ejemplo anterior se hace la observación de que los principios y las técnicas de conteo son útiles incluso en contextos fuera del área de probabilidad.

3.2. PRINCIPIO ADITIVO

Si la ocurrencia de un evento puede pasar en k clases de formas disjuntas, donde la primera clase consta de n_1 maneras distintas, la segunda clase consta de n_2 maneras distintas, y así sucesivamente hasta la k-ésima clase que consta de n_k maneras distintas, entonces el número de formas en que el evento puede ocurrir es como en (4):

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k \qquad (4)$$

el cual recibe el nombre de principio aditivo.

Para que el estudiante identifique la diferencia entre ambos principios, se observa que en el caso multiplicativo es posible definir una secuencia de pasos, mientras que, en el caso aditivo, no hay pasos, sino un determinado número de clases o categorías distintas en las que un mismo evento puede ocurrir.

Ejemplo 5. Un restaurante tiene en su menú de postres, 4 clases de panqués, 2 clases de galletas y 3 clases de helado. Encuentre el número de formas en las que una persona puede pedir: a) uno de los postres, b) una selección de cada clase de postre.

Solución a) Se trata de un solo evento, en el que una persona puede elegir un panqué, una galleta o un helado (estas se consideran clases o categorías distintas sin elementos en común). Por lo tanto, se aplica el principio aditivo, y se concluye que hay 4+2+3=9 formas distintas de elegir un solo postre.

Solución b): Se considera a la selección de tres postres como un conjunto de tres pasos, en los que la persona elige un panqué, una galleta y un helado, de acuerdo con el principio multiplicativo, hay $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ formas distintas de elegir un postre de cada tipo, ver Figura 3.

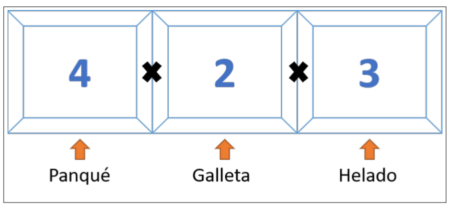


Figura 3. Principio multiplicativo para Ejemplo 3(b) (elaboración propia).

Para la solución de dichos problemas que emplean el principio multiplicativo también puede ser de utilidad la representación gráfica por medio de lo que se denomina diagrama de árbol [1], tal como se muestra en la Figura 4.

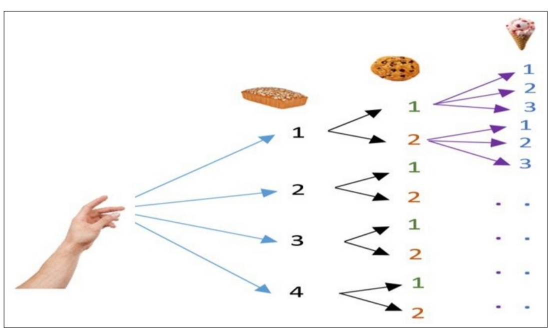


Figura 4. Diagrama de árbol para Ejemplo 3b) (elaboración propia).

4. TÉCNICAS DE CONTEO

De acuerdo con investigaciones recientes [5,7,8] los estudiantes presentan dificultades en la comprensión y aplicación de las técnicas de conteo. En [5] se propone el diseño e implementación de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), que permita al estudiante manipular situaciones en las que se requieren distintas técnicas de conteo, en [7] se plantea la importancia de construir un aprendizaje más significativo por medio de problemas que involucren situaciones contextualizadas, rebasando el molde de los problemas que involucran juegos de azar, por otro lado en [8] se enfatiza la importancia de enseñar a resolver los problemas bajo un esquema de "pasos" o "etapas" que permita al estudiante descomponer el problema e identificar los principios y técnicas adecuados, ya que los estudiantes presentan dificultades y confusiones al determinar qué estrategias o principios deben emplear.

En lo que sigue se presentan las técnicas de conteo: permutaciones y combinaciones, acompañadas de ejemplos cuya resolución operacional es abordada por medio de herramientas del tipo software como WolframAlpha, GeoGebra y Excel.

4.1. PERMUTACIONES

Una permutación es una técnica de conteo que permite calcular el número de ordenaciones de un conjunto de n elementos, una ordenación es un arreglo sin repetición. Si se desea ordenar r elementos de un conjunto que contiene n objetos, el número de opciones se determina de acuerdo con el número de elementos que puede ocupar cada una de las r posiciones del arreglo.

Permutación (r de n elementos). Sea A un conjunto que contiene n elementos distintos, el número total de arreglos ordenados diferentes de tamaño r que se pueden construir a partir de A, es decir, permutaciones de tamaño r, denotadas P_r^n es como en (5):

$$P_r^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \qquad (5)$$

Dentro de las técnicas de conteo es

importante conocer la definición del factorial de un número entero positivo.

Factorial. Sea n un número entero positivo, el factorial de n se define como en (6):

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \qquad (6)$$

Por definición $0!=1$.

Con esta definición se puede verificar la siguiente igualdad [1]

$$P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (7)$$

Ejemplo 6. ¿Cuántos números se pueden formar con los digitos 1, 2, 3, 5, 7, 8, y 9 que resulten ser pares?

Solución. Se observa que las permutaciones que satisfacen la condición terminan en 2 o en 8, por lo tanto, sean $A=\{la\ \ permutación\ \ termina\ \ en\ \ 2\}$ y $B=\{la\ \ permitación\ \ termina\ \ en\ \ 8\}$ el conjunto A tiene $P_6^6=6!$, al igual que el conjunto B, y el total de permutaciones pares son $6!+6!$. La parte operacional del ejercicio se propone agilizar con el uso de software como WolframAlpha, Excel o GeoGebra, tal como se muestra en la Figura 5.

Ejemplo 7. Suponer que hay m mujeres y h hombres, los cuales se sientan de forma aleatoria en $m+h$ asientos colocados en fila para ellos, encontrar la probabilidad de que todas las mujeres queden sentadas de forma adyacente [1].

Solución. Se considera el caso en el que las m mujeres ocupan los primeros m lugares y los hombres el resto, un segundo caso es aquel en el que el primer asiento lo ocupa un hombre, después las m mujeres, y luego los h-1 hombres restantes, siguiendo este proceso se observa que, hay h+1 posibles casos. Cada caso puede ocurrir de distintas formas, las m mujeres pueden acomodarse de $P_m^m=m!$ formas diferentes, y los hombres pueden ordenarse de $P_h^h=h!$ formas distintas. Tal como se ve en la Figura 6. Por lo tanto, hay $(h+1)\cdot m!\cdot h!$ formas en las que las mujeres pueden sentarse de forma adyacente, y la probabilidad es este número de casos, sobre el número de casos totales, por lo tanto, sea $A=\{las\ mujeres\ se\ sientan\ adyacentes\ entre\ ellas\}$

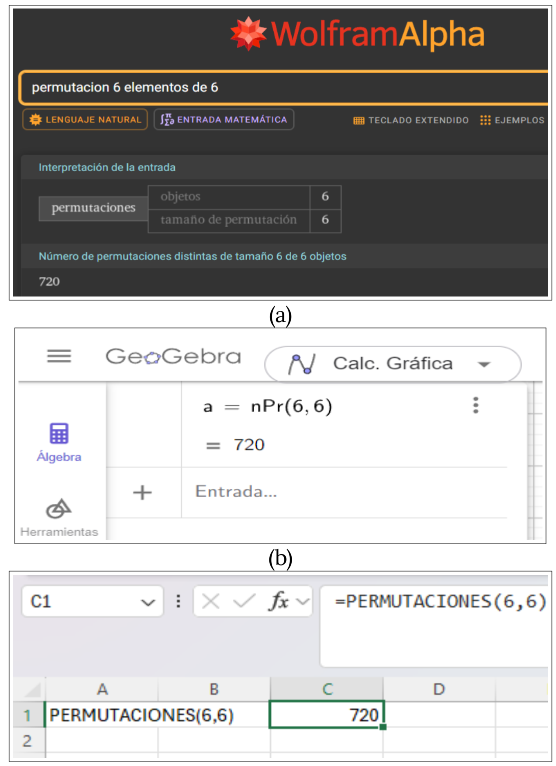


Figura 5. Cálculo de la permutación para el Ejemplo 6 en WolframAlpha (a), GeoGebra(b) y Excel(c) (elaboración propia).

$$P(A)=\frac{(h+1)\cdot(m!)\cdot(h!)}{(m+h)!} \qquad (8)$$

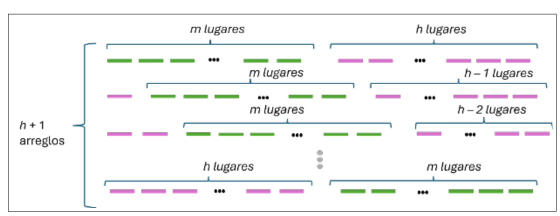


Figura 6. Esquema de casos posibles para Ejemplo 7 (elaboración propia).

En el Ejemplo 7 no hay operaciones aritméticas que resolver, ya que se resuelve en términos de variables para un caso general, sin embargo, una alternativa de aplicación dentro del aula puede ser plantear el problema con valores numéricos y después cuestionar sobre el caso general.

4.2. COMBINACIONES

Las combinaciones son una técnica de conteo en la que el orden no es relevante para diferenciar a un posible resultado de otro, por ejemplo, al conformar equipos en un salón de clases no se toma en cuenta el orden en que se asignaron a los miembros del equipo, sino que la diferencia entre un posible equipo y otro, son los miembros mismos.

Combinación (r de n elementos). Sea A un conjunto que contiene n elementos distintos, el número total de combinaciones diferentes de tamaño r que se pueden construir a partir de A, el cual se denota por C_r^n es como en (9):

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \tag{9}$$

Ejemplo 8. ¿Cuántas fichas de dominó distintas se pueden formar con los números enteros del 1 al 100?

Solución. Las fichas de dominó son de dos tipos, las denominadas "mulas", que son aquellas que tienen dos números iguales y las otras que tienen dos números diferentes, en un juego de dominó en el que las fichas tengan números entre el 1 y el 100, habrá 100 mulas y el resto son fichas con números diferentes, las cuáles se pueden formar de C_2^{100} formas distintas. Es decir, el número total de fichas de dominó es como en (10):

$$100+C_2^{100}=100+\frac{100!}{2!\cdot 98!} \tag{10}$$

El resultado de los cálculos de (10) es 5050, tal como se ve en la Figura 7.

Ejemplo 9. Una empresa emplea 18 trabajadores en el turno matutino, 17 en el turno de la tarde y 11 en el turno de la noche. Al seleccionar a 5 de estos trabajadores, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos turnos diferentes estén representados en los trabajadores seleccionados?

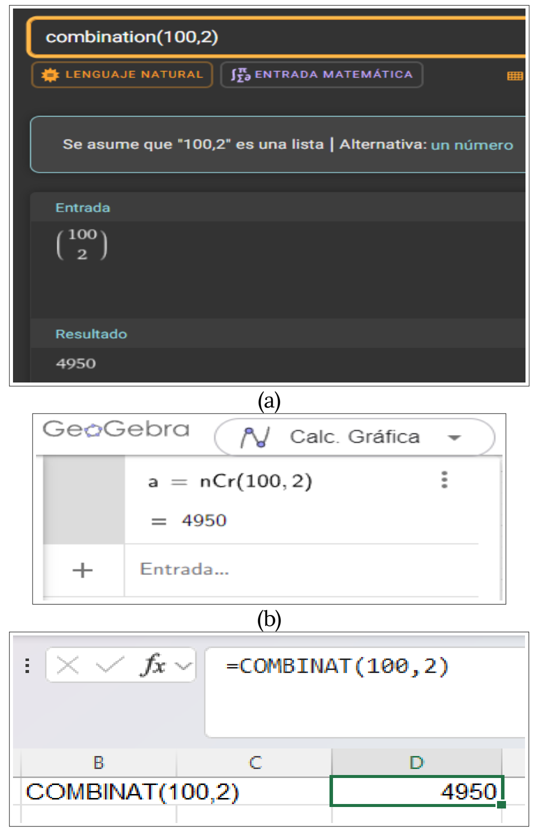
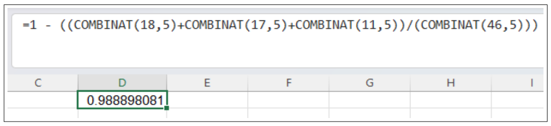


Figura 7. Cálculos de la solución Ejemplo 8 en WolframAlpha (a), GeoGebra (b) y Excel (c) (elaboración propia).

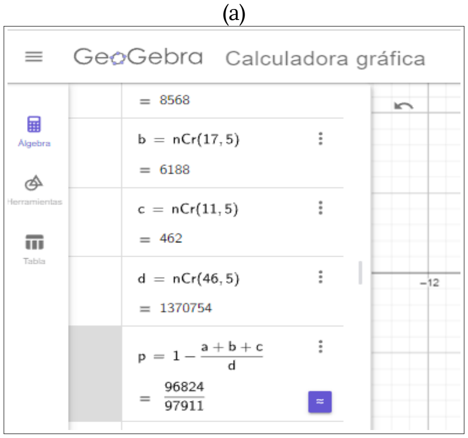
Solución: Seleccionar al menos dos turnos en la muestra significa incluir exactamente dos o tres turnos, esto puede ocurrir de diversas formas, si $A=\{trabajadores\ de\ al\ menos\ dos\ turnos\ distintos\}$, el complemento de este evento es $A^C=\{trabajadores\ del\ mismo\ turno\}$ y aunque el ejercicio pide calcular $P(A)$, esta probabilidad se puede obtener de calcular $1-P(A^C)$, de acuerdo con la Proposición 1. Por otro lado, $P(A^C)$ es la suma de las probabilidades de elegir a todos los trabajadores del turno matutino, más la de elegir a todos del turno vespertino, más la de elegir a todos del turno nocturno, las cuáles son C_5^{18}/C_5^{46}, C_5^{17}/C_5^{46} y C_5^{11}/C_5^{46}, respectivamente. De esa forma se calcula $P(A)$ como en (11).

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\left[\frac{\binom{18}{5}+\binom{17}{5}+\binom{11}{5}}{\binom{46}{5}}\right]=0.9888 \quad (11)$$

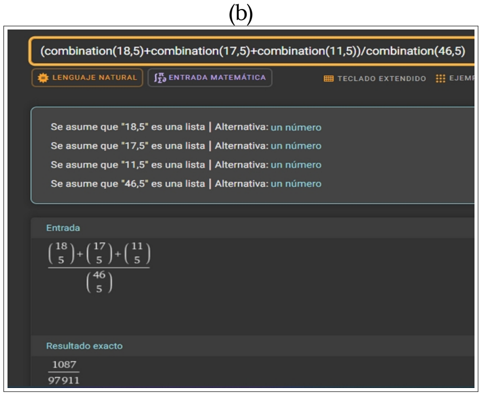
La parte operacional se optimiza al implementar el uso de las herramientas ya mencionadas, tal como se ve en la Figura 8.



(a)



(b)



(c)

Figura 8. Cálculos de la solución Ejemplo 9 en Excel (a), GeoGebra (b) y WolframAlpha (c) (elaboración propia).

La solución del Ejemplo 9, requiere identificar algunos elementos, el primero es observar una mayor practicidad al optar por el cálculo de la probabilidad del evento complementario, después el identificar que A^C se conforma de tres casos distintos: elegir a todos del turno matutino, vespertino o nocturno, hasta el cálculo de las operaciones combinatorias.

Al introducir el uso de herramientas tecnológicas se propone que el estudiante dirija su concentración y tiempo principalmente al razonamiento de los problemas a resolver, y de esa forma priorizar la comprensión y reflexión de los conceptos estudiados antes que la reproducción de un algoritmo aritmético. Este objetivo se respalda en las investigaciones hechas en [5, 7, 8].

En la Tabla 2 se reúnen la sintaxis empleada en cada herramienta de software para las técnicas de conteo revisadas.

Tabla 2. Sintaxis de diferentes técnicas de conteo.

Técnica	**Wolfram Alpha**	**Geo Gebra**	**Excel**
Permutaciones de r en n objetos.	Permutation(n,r)	nPr(n,r)	permutaciones(n,r)
Combinaciones de r de n objetos.	Combination(n,r)	nCr(n,r)	combinat(n,r)
Factorial de r.	Factorial r	r!	fact(r)
Combinación con repetición de r de n objetos.	-	-	combina(n,r)

Tal como puede verse en la Tabla 2, en el caso de las combinaciones con repetición no hay una función explícita para WolframAlpha, ni para GeoGebra, lo que explica la preferencia de algunos autores por considerar a Excel dentro de la enseñanza y aprendizaje de estos temas [3].

Ejemplo 10. ¿De cuántas formas se pueden repartir 2 dulces a 3 niños diferentes?

En este tipo de problema se cuentan conjuntos, donde cada conjunto tiene 2 elementos y representa las distintas formas en que se puede hacer esa repartición. Si se etiqueta a los niños con las letras a,b y c, las opciones son como en la Tabla 3.

Tabla 3. Combinaciones con repetición de un conjunto de tres elementos.

$\{a,a\}$	$\{b,b\}$	$\{c,c\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$

Es decir, 6 opciones diferentes.

En (12) se presenta la expresión propia de este tipo de casos o problemas en los que se debe calcular el número de conjuntos de tamaño r que se pueden formar con los elementos de un conjunto de tamaño n, en el que se acepta repetición, o bien las diferentes formas de repartir r objetos a un total de n elementos [1].

$$CR_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!} \tag{12}$$

El uso de las herramientas mencionadas en la Tabla 2 presenta ventajas y limitaciones, las cuales se reúnen en la Tabla 4.

Tabla 4. Ventajas y limitaciones de las herramientas de software para cálculos en ejercicios de técnicas de conteo.

Herramienta	Análisis
WolframAlpha	Ventajas: • Muestra el desarrollo de las operaciones. • Tiene opción de lenguaje natural que interpreta las instrucciones del usuario. • Ofrece ejemplos al usuario. Desventajas: • Requiere que el dispositivo tenga acceso a internet.
GeoGebra	Ventajas: • Es posible descargar la versión para computadora que no requiere internet. • Existen unidades y recursos diseñados en esta herramienta para enseñar distintas técnicas de conteo. • Permite visualizar varias operaciones de forma simultánea. Desventajas: • Requiere orientar al estudiante en la forma de utilizar funciones y definir variables.
Excel	Ventajas: • Ofrece funciones para las combinaciones con repetición. • Permite visualizar varias operaciones de forma simultánea. • No requiere Internet. Desventajas: • Existen diferentes versiones de Excel que pueden crear una variación de sintaxis.

Es posible acceder a una versión online de cada herramienta, en cuyo caso, las limitaciones son el acceso a internet, y de forma indirecta, que el estudiante ocupe el dispositivo para buscar directamente las respuestas a los ejercicios o actividades planteados, entre otras. Por lo anterior, es importante fortalecer, en las actividades, la etapa de validación de los resultados con cuestionarios que permitan evidenciar si el estudiante ha comprendido el problema a tratar, así como la solución.

5. CONCLUSIONES

La enseñanza de la probabilidad es relevante en la formación de competencias matemáticas y aunque es impartida de forma intuitiva en educación básica; al llegar a nivel medio superior y superior se observan dificultades y retos [5, 7, 8]. En este trabajo se han reunido lo que se considera los elementos básicos, desde los enfoques de probabilidad, hasta los principios básicos de conteo. La axiomatización de la teoría de probabilidad respalda la importancia de desarrollar habilidades en la interpretación y manejo básico de la teoría de conjuntos, que aunque pese a que no se abordaron en este trabajo son importantes en la comprensión de los problemas.

La parte operacional puede ser optimizada con el uso de software libre como WolframAlpha, GeoGebra o Excel, esto no reemplaza la necesidad de que los alumnos sepan desarrollar un cálculo a mano, su uso se recomienda en una etapa posterior a la definición y ejercitación, fungiendo como herramientas que faciliten la parte operacional cuando el reto principal es que el alumno determine qué principio probabilístico ayuda a dar respuesta al problema y la técnica de conteo a emplear. Estas herramientas son compatibles con los nuevos enfoques de enseñanza, tal como en aprendizaje con base en problemas.

Como trabajo a futuro se propone ahondar aún más en la aceptación y resultados de implementar estas herramientas en el aula..

REFERENCIAS

[1] Ash RB. *Basic probability theory*. 3rd ed., Mineola (NY): Dover Publications; 2008.

[2] Devore JL. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 9ª ed., México: Cengage Learning; 2017.

[3] Gámiz Casarrubias BE, Gámiz Casarrubias OT. *Probabilidad y estadística, con prácticas en Excel*. 2ª ed., México: JIT Press; 2012.

[4] JP MathPR. *Python - Generadores de números & caracteres* [Internet]. GeoGebra; [citado 2025 jul 17]. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/xa4gepwg.

[5] Martínez G. *Construcción de objeto virtual de aprendizaje para la adquisición de estrategias en técnicas de conteo* [tesis de maestría]. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia; 2013 [citado 2025 jul]. Disponible en: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/49875

[6] Meyer P. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. 2ª ed., México: Fondo Educativo Interamericano; 1999.

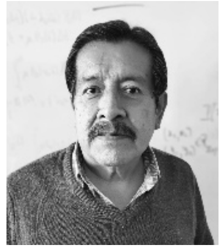
[7] Graciano Montoya JA, Morales Miranda GJ. *Aprendizaje de técnicas de conteo sin repetición a través de la resolución de problemas* [trabajo de licenciatura]. Medellín: Universidad Cooperativa de Colombia; 2019 [citado 2025 jul]. Disponible en: https://repository.ucc.edu.co/entities/publication/f91451d8-7036-4200-9e5c-6726ba616e57.

[8] Sanabria G. Una propuesta para la enseñanza de los elementos de análisis combinatorio. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. 2010;10(2):1–15

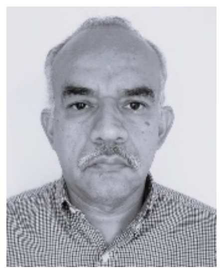
[9] Walpole RE, Myers RH, Myers SL, Ye K. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 9ª ed. México: Pearson Educación; 2012.

ACERCA DE LOS AUTORES

María Cristina Medel López, obtuvo el grado de licenciada en Matemáticas Aplicadas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. De 2021 a 2023 se desempeñó como editora de libros del área de ciencias exactas para nivel medio superior, así como docente de nivel secundaria. Actualmente es estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Sus áreas de interés son la Teoría de Confiabilidad y la enseñanza de probabilidad, por lo que ha participado en diversos congresos como el Congreso Internacional de las Matemáticas y sus Aplicaciones, y el Congreso Educación Salud y Tecnología en sus ediciones del 2024.



Francisco Solano Tajonar Sanabria, profesor adscrito a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, desde marzo de 1984. Doctorado, Maestría y Licenciatura en Ciencias Matemáticas otorgados por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Integrante del Cuerpo Académico de Probabilidad y Estadística. Las líneas de investigación de interés son Probabilidad y Estadística, en particular Análisis de Supervivencia, Teoría de Riesgo, Matemáticas Financieras, Teoría de Colas.



Fernando Velasco Luna, cursó la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Veracruzana, realizó los estudios de maestría en el área de Probabilidad y Estadística, recibió el grado de Dr. en Matemáticas con énfasis en Probabilidad y Estadística por la Universidad Veracruzana en el año 2011. Es profesor Investigador de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla desde el año 2012. Imparte los cursos del área de Probabilidad y Estadística en las Licenciaturas de matemáticas, Actuaría, y Matemáticas Aplicadas, ha dirigido tesis de licenciatura, escrito artículos de investigación. Sus intereses de investigación son en el área de Probabilidad y Estadística.

Hugo Cruz-Suárez obtuvo un doctorado en ciencias matemáticas por la Universidad Autónoma Metropolitana, Campus Iztapalapa, México, en 2006. En la actualidad, es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Sus intereses de investigación abarcan la optimización estocástica, con un enfoque particular en los procesos de decisión de Markov, así como la aplicación de la teoría de conjuntos difusos y la teoría de grafos aleatorios. Además de sus áreas principales de investigación, el Dr. Cruz-Suárez se interesa en el desarrollo y aplicación de métodos matemáticos avanzados para la resolución de problemas complejos en diversos campos.