Formas cuadráticas unitarias de tipo A_n: un enfoque combinatorio

Cuadratic unit forms of type A_n: a combinational aproach

Mario Alberto Abarca-Sotelo,[1]* Antonio Daniel Rivera-López[1]

[1] Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
Universidad 1001. Col. Chamilpa. Cuernavaca, Morelos. México
* Correo-e: asma@uaem.mx

PALABRAS CLAVE:

formas unitarias, tipo Dynkin, recorrido en profundidad

RESUMEN

Los diagramas de Dynkin aparecen en distintas ramas del álgebra, por ejemplo, en formas cuadráticas la clasificación de formas unitarias positivas se hace a través de diagramas de Dynkin. Los diagramas de Dynkin, en álgebras de Lie, se asocian a los sistemas de raíces abstractos; en teoría de representaciones de álgebras, hacen su aparición en la clasificación de módulos inescindibles sobre álgebras de dimensión finita. En este trabajo se estudian los diagramas de Dynkin como gráficas asociadas a formas cuadráticas. A toda forma cuadrática de coeficientes enteros se le asocia una multigráfica donde los vértices representan variables y las aristas representan monomios. Esta representación ha sido parte fundamental en clasificación de las formas unitarias positivas y más recientemente fue de granutilidad para obtener una caracterización que permite construir cualquier forma positiva de tipo A_n. En este trabajo se reinterpreta dicha caracterización en un contexto puramente combinatorio utilizando propiedades de conexidad, coloreo de gráficas y recorrido en profundidad; además, se ofrecen criterios computacionalmente eficientes.

KEYWORDS:

unit forms, Dynkin type, depth first search

ABSTRACT

The Dynkin diagrams appear in different branches of algebra, for example, the classification of positive quadratic unit forms is made through Dynkin diagrams. Dynkin diagrams in Lie algebras are associated with abstract root systems and in representation theory of algebra make their appearance in the classification of non-split modules over finite dimensional algebras. In this paper Dynkin diagramsare studied as graphs associated quadratic forms. Aquadratic form with integer coefficients is assigned a multigraph where the vertices represent variables and edges represent monomials. This representation has been a fundamental part in the classification of positive unit forms and more recently wasvery useful in obtaining a characterization for constructing any positive form of type A_n. In this paper this characterization is reinterpreted in a purely combinatorial context using properties of connectivity, coloring of graphs and depth-first traversal; also, a computationally efficient criteria is given.

1 CONCEPTOS Y ANTECEDENTES

Se dice que un polinomio multivariable $q : Zn \to Z$ es una forma cuadrática entera (ver [1]) si se puede expresar como

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j$$

para algunos $qi\,j \in Z$ (convenimos que $qi\,j = qj\,i$). Más aún, diremos que la forma es unitaria si $qi\,i = 1$ para todo i, y positiva si $q(\tilde{x}) > 0$ para todo vector entero $\tilde{x} \in Z^n$ distinto de $\tilde{0}$. Cada forma unitaria q tiene asociada una gráfica $\boldsymbol{B}q$ que se construye de la siguiente forma: los vértices son $x1, x2, \ldots, xn$, y para todo $i < j$ colocamos $|q_{ij}|$ aristas de x_i a x_j, punteadas si $q_{ij} > 0$ o sólidas en caso contrario. Cabe notar que si q es una forma unitaria positiva entonces $\boldsymbol{B}q$ es una gráfica simple porque todo $q_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, a este tipo de formas unitarias les llamaremos simples y trabajaremos con ellas el resto del artículo.

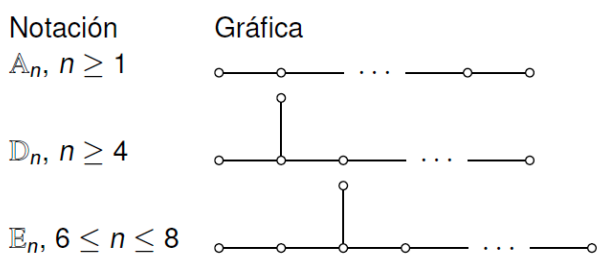

Figura 1. Gráficas de Dynkin

Decimos que dos formas unitarias q y q' son Z-equivalentes si existe una transformación Z-lineal y Z-invertible $L : Z^n \to Z^n$ tal que $q'(\tilde{x}) = q(L(\tilde{x}))$; la transformación L es Z-lineal y Z-invertible si L y L^{-1} respectivamente se pueden expresar como matrices de entradas enteras.

Las formas cuadráticas unitarias están clasificadas de acuerdo al siguiente teorema tomado de Gabriel y Vladimirovich [2]:

Teorema 1. *Toda forma unitaria q es positiva si y sólo si es Z-equivalente a q' donde cada componente conexa de $B_{q'}$ es isomorfa a una gráfica de Dynkin.*

La gráfica $\boldsymbol{B}_{q'}$ es única hasta isomorfismo y se le conoce como el tipo Dynkin de q.

El antecedente principal de este trabajo se encuentra en el trabajo de Michael Barot [3], donde se explica cómo se construye cualquier forma unitaria con tipo Dynkin A_n. Sean m y m' enteros no negativos con $m + m' \geq 1$; denotamos con $\boldsymbol{F}_{m,m'}$ a la gráfica de $m + m'$ vértices $(1, 1), \ldots, (1,m), (2, 1), \ldots, (2,m')$, aristas sólidas $(1, i)$——$(2, j)$ y aristas punteadas (k, i')– – –(k, j') para todos los k, i, j, i', j'. A las gráficas $\boldsymbol{F}_{m,m}$ se les llama A-bloques y convenimos en escribir $m \geq m'$.

Teorema 2. *Una forma unitaria q es de tipo A_n si y sólo si se obtiene a partir de un ensamble de árbol de A-bloques, es decir, existe un árbol T con vértices 1, 2, . . . , t donde cada vértice i tiene asociado una gráfica $B_i = F_{mi,m'i}$ y una función inyectiva σi que asocia a cada arista e, incidente en i, con un vértice v de Bi; tal que Bq se obtiene de identificar σi (e) = σ_j (e) para todas las aristas e = i——j ∈ E (T).*

2 RESULTADO PRINCIPAL

Un árbol generador para una gráfica conexa G es una subgráfica T donde $V(T) = V(G)$ y T es un árbol. Cuando T es un árbol que se obtiene de realizar un recorrido primero en profundidad sobre G, decimos que T es un árbol generador en profundidad. Si T es un árbol generador de G, un ciclo fundamental de G en T se forma al agregar a T una arista σ de G; diremos que un ciclo fundamental d es maximal si no existe ningún otro ciclo fundamental d' que contenga propiamente a los vértices de d. Una arista es un puente si al borrarla de G aumenta el número de componentes conexas. Finalmente, dado el árbol generador T para la gráfica G y una arista $\sigma \in E(G)$ incidente en u y v, existe un único camino $u \to v$ en T; definimos $(\sigma)_T$ como la subgráfica de G inducida por los vértices de este camino.

Sea q una forma unitaria y sea T un árbol generador en profundidad de $\boldsymbol{B}q$. Supongamos que se colorean los vértices de $\boldsymbol{B}q$ de blanco y negro, de tal forma que el árbol T sólo contiene tres tipos de aristas: ○···○, ●···● y ○—● ; es decir, las aristas punteadas tienen sus extremos del mismo color mientras que las aristas sólidas tienen sus extremos de color diferente. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ todas las aristas que definen un ciclo fundamental maximal o un puente, y para cada arista $\sigma_i = u_i$—— v_i , denotamos con n_i a cantidad de vértices que hay en el (único) camino $u_i \to v_i$ de T.

Teorema 3. *q es de tipo A_n si y sólo si tiene estas tres propiedades:*

Propiedad 1 $\boldsymbol{Bq}$ tiene $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \cdots + \binom{n_t}{2}$ aristas.
Propiedad 2 las aristas de $\boldsymbol{Bq}$ son sólo de tres tipos, ○···○, ●···● o ○—●.
Propiedad 3 todo vértice de $\boldsymbol{Bq}$ pertenece cuando mucho a dos gráficas $(\sigma_i)_T$.

En las secciones que siguen se demuestra este teorema, así como varios criterios para determinar cuándo una forma unitaria q no es de tipo A_n.

3 HERRAMIENTAS BÁSICAS

3.1 Conectividad

Una gráfica es k-conexa si es necesario quitar al menos k vértices para hacerla disconexa (ver [4]). Sea G una gráfica conexa; una subgráfica biconexa (2-conexa) B es maximal si no existe ninguna otra subgráfica biconexa B' que contenga propiamente a las aristas de B. A las subgráficas biconexas maximales de G se les conoce como componentes biconexas, y particionan al conjunto de aristas de G. Claramente, una arista es un puente si y sólo si es en sí misma una componente biconexa. Un punto de articulación es un vértice v tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que G.

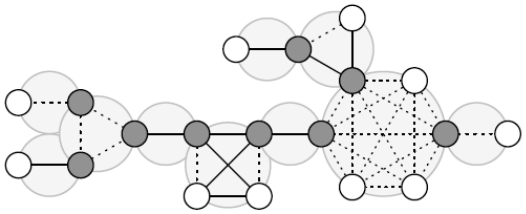

Figura 2. Ejemplo del corolario 4. Los puntos de articulación fueron sombreados con gris oscuro y las componentes biconexas con gris claro

Toda gráfica conexa es un ensamble de árbol de gráficas biconexas B_i , salvo que las σ_i no necesariamente son inyectivas. La inyectividad sirve para garantizar que una vez que se identifica $\sigma_i(e) = v = \sigma_j(e)$ ya no se puede identificar v con ningún otro vértice, y entonces v pertenece a exactamente dos componentes biconexas (B_i y B_j). Por lo tanto, el teorema 2 se puede reescribir como sigue:

Corolario 4. *Una forma unitaria q es de tipo A_n si y sólo si Bq es conexa, sus componentes biconexas son A-bloques y todo punto de articulación pertenece a exactamente dos de estas componentes.*

3.2 Bipartición

Por su definición, cada gráfica $\boldsymbol{F}_{m,m'}$ es bipartita en las aristas sólidas y se obtiene a partir de $K_{m,m'}$ agregando aristas punteadas entre todas las parejas de vértices x, y que no son adyacentes. Esta propiedad bipartita se puede extender hacia toda la gráfica de q como sigue:

Lema 5. *Todas las componentes biconexas de una gráfica Bq son A-bloques si y sólo si existe una partición $\{B,N\}$ de $V(B_q)$ tal que toda arista punteada tiene ambos extremos en B o ambos en N, toda arista sólida tiene un extremo en B y el otro en N, y además cada componente biconexa de n_i vértices tiene $\binom{n_i}{2}$ aristas.*

Demostración. $\Rightarrow$: Sean $B_1, B_2, \ldots, B_t$ las componentes biconexas de una gráfica $\boldsymbol{Bq}$, cada una de ellas un A-bloque. Dado que B_1 es una gráfica $\boldsymbol{F}_{m1,m'_1}$ entonces es bipartita en las aristas sólidas y su conjunto de vértices admite una partición $\{B_1,N_1\}$. Supóngase que B_j tiene un vértice v en común con B_1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v \in B_1$ (en caso contrario podemos invertir el rol de B_1 y N_1). Defínase

$B_j = \{v\} \cup \{w|$existe una arista punteada v−−−$w\}$
$N_j = \{w|$existe una arista sólida v——$w\}$

Como B_j es un A-bloque entonces $\{B_j ,N_j\}$ es una partición de $V(B_j)$. Podemos continuar este proceso para toda componente B_i; haciendo $B = B_1 \cup \ldots \cup B_t$ y $N = N_1 \cup \ldots \cup N_t$ se obtiene la partición deseada. Queda claro además que $\boldsymbol{F}_{m1,m'}$ tiene $\binom{m+m'}{2}$ aristas: una entre cada par de vértices.

$\Leftarrow$: Sea B una componente biconexa de la gráfica $\boldsymbol{Bq}$ con n_i vértices. Como B es una subgráfica de $\boldsymbol{Bq}$, entonces también es una gráfica bipartita en las aristas sólidas. Como B tiene $\binom{n_i}{2}$ aristas entonces tiene una arista entre cada par de vértices. Supongamos que m de estos vértices pertenecen a B y m' pertenecen a N. Por hipótesis tenemos que las aristas punteadas tienen ambos extremos en B o ambos en N y las sólidas tienen un extremo en B y otro en N, entonces B es la gráfica $\boldsymbol{F}_{m,m'}$.

3.3 Ciclos

Definimos el marco de una gráfica $\boldsymbol{Bq}$ como la gráfica Φ $(\boldsymbol{Bq})$ que se obtiene de reemplazar las aristas punteadas de $\boldsymbol{Bq}$ con aristas sólidas.

Lema 6. *Dada una gráfica B, las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

1. B es un A-bloque.
2. Φ (B) es una gráfica completa y todo ciclo tiene un número par de aristas sólidas.
3. B tiene menos de tres vértices o bien toda subgráfica de B inducida por tres vértices es isomorfa a $F_{3,0}$ o $F_{2,1}$.

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2: Es claro que Φ (B) es una gráfica completa; mostraremos por contradicción que todo ciclo tiene un número par de aristas sólidas. Sea $\{B, N\}$ la partición de los vértices de B según el lema anterior. Supongamos que $u \in B$ y que se tiene un ciclo $u \rightarrow v \rightarrow u$ donde v es el último vértice en ser alcanzado mediante una arista sólida, de manera que el subcamino $v \rightarrow u$ contiene sólo aristas punteadas. Cada vez que el camino pasa por una arista sólida se alterna entre un vértice de B y otro de N, por lo tanto, si este ciclo tiene un número impar de aristas sólidas entonces $v \in N$, pero aplicando el mismo argumento al subcamino $v \rightarrow u$ que no contiene ninguna arista sólida tenemos que $u \in N$ (contradicción).

2 $\Rightarrow$ 3: Como Φ (B) es una gráfica completa entonces todo trío de vértices u, v, w induce un ciclo de longitud 3 que, por hipótesis, tiene un número par de aristas sólidas. Los únicos ciclos de este tipo son $\boldsymbol{F}_{3,0}$ y $\boldsymbol{F}_{2,1}$.

3$\Rightarrow$ 1: Si B tiene menos de tres vértices entonces sólo puede ser isomorfa a los A-bloques $F_{1,0}$, $F_{1,1}$ o $F_{2,0}$. Supongamos que B tiene al menos tres vértices. Dejemos fijo un vértice v y defínanse B y N igual que B_j y N_j del lema anterior con $v \in B$. Por hipótesis, para cada par de vértices u, w, el trío u, v, w induce la gráfica $F_{3,0}$ o $F_{2,1}$. Así, cuando $u \in B$ y $w \in N$ tenemos que B contiene la subgráfica v−−−u——w——v; cuando ambos $u,w \in N$ contiene v——u−−−w——v, y finalmente cuando u, $v \in B$ contiene v−−−u−−−w−−−v. En cualquier caso se cumple que si la arista u——w atraviesa de B a N entonces es sólida, y que en caso contrario es punteada; por lo tanto B es un A-bloque.

3.4 Árboles generadores

Lema 7. *Todo árbol determina un único A-bloque y todo A-bloque queda determinado por un árbol generador.*

Demostración. Supongamos que T es un árbol generador de n vértices para $B = F_{m,m'}$. Como T es generador entonces $m + m' = n$. Cada arista u——$v \in E(B) \setminus E(T)$ forma un ciclo en T (esta arista siempre existe en B porque Φ $(B) = Kn$), pero el lema 6 afirma que todo ciclo tiene un número par de aristas sólidas, por lo tanto es posible determinar de forma única si la arista u——v es sólida o punteada. Repitiendo este argumento para cada arista se puede determinar de manera única una gráfica B' a partir de T. Por construcción, basta mostrar que B' es un A-bloque para garantizar que $B = B'$. Por lema anterior podemos suponer que B' tiene al menos tres vértices diferentes x, y y z. Sea w el último vértice que tienen en común los caminos (únicos) $x \rightarrow y$ y $x \rightarrow z$ en el árbol T. No estamos excluyendo la posibilidad de que $w = y$ o $w = z$. Denotemos con α el número de aristas sólidas en el camino $x \rightarrow w$, con β las del camino $w \rightarrow y$ y con γ las de $w \rightarrow z$. Si los tres números α , β y γ son todos pares o todos impares, entonces $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ y $\beta + \gamma$ son todos pares; por la construcción de B' hemos formado el ciclo x-----y-----z-----x que es isomorfo a $F_{3,0}$. En otro caso (que no todos sean pares ni todos impares) tendremos que exactamente uno de los números $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ y $\beta + \gamma$ es par y los otros dos impares, pero entonces x, y y z inducen a $F_{2,1}$. Hemos mostrado que todo trío de vértices induce una gráfica $\boldsymbol{F}_{3,0}$ o $\boldsymbol{F}_{2,1}$, entonces por lema anterior tenemos que B' es un A-bloque.

Un camino hamiltoniano en una gráfica G es un camino que pasa por todos los vértices de G exactamente una vez.

Lema 8. *Todo árbol generador en profundidad para la gráfica $F_{m,m'}$ es un camino hamiltoniano.*

Demostración. Como $F_{m,m}$ es completa, durante un recorrido en profundidad todo vértice que esté sin visitar es adyacente al vértice actual, luego entonces se visitan todos los vértices antes de poder hacer el primer paso de retroceso.

Corolario 9. *Sea q una forma de tipo A_n. Entonces todo árbol generador en profundidad de B_q es un árbol binario.*

Demostración. Por lema anterior, el recorrido en profundidad genera un camino hamiltoniano en cada componente biconexa de $\boldsymbol{B}_q$; por lo tanto, los únicos vértices que pueden tener más de un hijo son los puntos de articulación. Por corolario 4 los puntos de articulación pertenecen a exactamente dos componentes biconexas. Entonces todo punto de articulación puede tener a lo mucho dos hijos: uno en cada componente biconexa.

Lema 10. *Sea T un árbol generador en profundidad de la gráfica G, entonces para toda arista u——$v \in E(G)$ existe al menos una arista α tal que α es un puente o define un ciclo fundamental maximal de G en T, y u——$v \in E(\langle\alpha\rangle_T)$.*

Demostración. Sea u——$v \in E(G)$; sin pérdida de generalidad supóngase que v desciende de u. Si u——v no pertenece a T entonces es una arista de retroceso que define un ciclo fundamental; por tanto u y v deben pertenecer a un ciclo fundamental maximal. En otro caso, si u——v es un puente, entonces u——v pertenece a $\langle u$——$v\rangle_T$. Finalmente, si u——$v \in E(T)$ pero no es un puente entonces por definición de puente al quitar a u——v de G los vértices u y v siguen conectados por un camino simple $v \to u$. Ya que v desciende de u, este camino contiene al menos una arista de retroceso v'——u' donde v' es v o un descendiente de v, y u' es u o un ancestro de u. Entonces podemos formar el ciclo fundamental $v \to v'$—— $u' \to u$ —— v que contiene a u y v; por tanto u y v pertenecen a un ciclo fundamental maximal.

Lema 11. *Sea q una forma de tipo A_n y sea T un árbol de generador en profundidad para Bq. Si B es una componente biconexa de Bq entonces, o bien B es un puente, o bien está inducida por los vértices de un ciclo fundamental maximal.*

Demostración. Sea B una componente biconexa de $\mathbf{B}q$ (q de tipo A_n). Si B tiene tres o más vértices, sea c el camino hamiltoniano $u \to v$ de B definido por T. Por ser B un A-bloque existe la arista u——$v \in E(B)$ que no forma parte de c y que al agregarla a T forma un ciclo fundamental. Este ciclo fundamental debe ser maximal por que, de hecho, es un ciclo hamiltoniano para B. Si B tiene menos de tres vértices entonces, como $\mathbf{B}q$ es conexa, inferimos que B debe tener dos vértices; pero toda componente biconexa de dos vértices es un puente.

Corolario 12. *Sea q una forma de tipo A_n, T un árbol generador en profundidad para Bq, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ todas las aristas que son puentes o que definen un ciclo fundamental maximal; entonces*

1. $\langle\alpha_1\rangle_T \cup \langle\alpha_2\rangle_T \cup \ldots \cup \langle\alpha_t\rangle_T = Bq$;
2. $E(\langle\alpha_i\rangle_T \cap \langle\alpha_j\rangle_T) = \Phi$; *para toda* $i \neq j$; *y*
3. *todo* $v \in V(B_q)$ *pertenece cuando mucho a dos gráficas* $\langle\alpha_i\rangle_T$.

Demostración. Inmediato del lema anterior, del corolario 4 y de que las componentes biconexas particionan $E(\boldsymbol{B}_q)$.

Corolario 13. *Sean q, T, y α_i como en el corolario anterior; para cada $\alpha_i = u_i$——v_i denotemos con n_i al número de vértices que contiene el único camino $u_i \to v_i$ de T. Entonces*

$$\left|E\left(\mathbf{B}_q\right)\right| = \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \cdots + \binom{n_t}{2}$$

Demostración. Como $\Phi(\langle\alpha_i\rangle_T) = K_{ni}$ entonces $|E(\langle\alpha_i\rangle_T)| = \binom{n_i}{2}$ y la demostración se sigue de las propiedades 1 y 2 del corolario anterior.

En muchos libros de nivel básico ([5], por ejemplo) se demuestran estas dos propiedades de los árboles generadores en profundidad T para una gráfica G:

1. Para toda arista u——$v \in E(G)$ se cumple que u es un descendiente de v o bien v es un descendiente de u en T (es decir, u y v no pueden estar en ramas diferentes). Decimos que e es una arista de árbol si $e \in E(T)$ y de retroceso en caso contrario.
2. Denotamos con T_x al subárbol de T enraizado en el vértice x. Un vértice p es un punto de articulación de G si y sólo si p es la raíz de T y tiene dos o más hijos, o bien si p es un vértice intermedio con al menos un hijo u tal que para todo $v \in V(T_u)$ se tiene que w——$v \in E(G)$ implica $w \in V(T_p)$.

4 DEMOSTRACIÓN DEL RESULTADO PRINCIPAL

El lema 5 y los corolarios 12 y 13 demuestran un sentido de la doble implicación enunciada en el teorema 3: B son los vértices color blanco y N los de negro. En esta sección mostramos el sentido recíproco. Para el resto de la sección T es un árbol generador en profundidad para $\boldsymbol{B}_q$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ todas las aristas

que son puentes o que definen un ciclo fundamental maximal, denotamos con n_i a cantidad de vértices que hay en el camino único $u_i \rightarrow v_i$ de T y suponemos por hipótesis las propiedades 1, 2 y 3 del teorema 3.

Sea $n'_i = |E(\langle\alpha_i\rangle_T)|$ para $i = 1, \ldots, t$. Por lema anterior sabemos que toda arista pertenece a una gráfica $\langle\alpha_i\rangle_T$. Como $\Phi(\langle\alpha_i\rangle) \subseteq K_{ni}$ tenemos $n'_i \leq \binom{n_i}{2}$ y por lo tanto

$$\left|E\left(\mathbf{B}_q\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{t} n'_i \leq \sum_{i=1}^{t} \binom{n_i}{2}$$

Por la propiedad 1 tenemos que $\sum_{i=1}^{t} n'_i = \sum_{i=1}^{t} \binom{n_i}{2}$. Como $n'_i \leq \binom{n_i}{2}$, entonces inferimos que $n'_i = \binom{n_i}{2}$; por lo tanto $\left\{E\left(\langle\alpha_i\rangle_T\right)\right\}_{i=1}^{t}$ es una partición de $E(\boldsymbol{B}_q)$ y $\Phi(\langle\alpha_i\rangle_T) = K_{ni}$ para toda i.

Supongamos que $p \in V(\langle\alpha_i\rangle_T \cap \langle\alpha_j\rangle_T)$ para algún par i, j; demostraremos que p es un punto de articulación. Por la definición de cada $\langle\alpha_k\rangle_T$ sabemos que en T existe un camino x——p——y tal que x——$p \in E(\langle\alpha_i\rangle_T)$ y p——$y \in E(\langle\alpha_j\rangle_T)$ para algunos $x, y \in V(\boldsymbol{B}_q)$. Denotamos con $Ady(p)$ al conjunto de vértices adyacentes a p y con $\pi(v)$ al padre de v en el árbol T. Tenemos dos casos:

1. Si $x = \pi(p)$ entonces $\pi(y) = p$. Mostraremos por contradicción que $w \in V(T_p)$ para todo par de $v \in V(T_y)$ y $w \in Ady(v)$. Supongamos que $w \notin V(T_p)$; como v——w está inducida por $\langle\alpha_k\rangle_T$ para alguna k (lema 10) entonces existe un ciclo fundamental maximal que pasa por el único camino $v \rightarrow w$ de T, por lo tanto x——p——y es una subgráfica de $\langle\alpha_k\rangle_T$, pero esto contradice que $\left\{E\left(\langle\alpha_i\rangle_T\right)\right\}_{i=1}^{t}$ es una partición de $E(\boldsymbol{B}_q)$. Por tanto p es un punto de articulación.
2. Si $x \neq \pi(p)$ entonces $p = \pi(x)$. Si $y = \pi(p)$ tenemos el caso 1 con los roles de x e y intercambiados, por lo tanto supongamos que $p = \pi(y)$. Si p es la raíz de T entonces p es un punto de articulación porque tiene dos hijos. Si p no es la raíz de T entonces tomando $x' = \pi(p)$ este caso se reduce al caso 1.

De lo anterior concluimos que cada subgráfica $\langle\alpha_i\rangle_T$ es una componente biconexa de $\boldsymbol{B}_q$.

Dada la propiedad 2, y que $n'_i = \binom{n_i}{2}$, el lema 5 nos dice que estas componentes biconexas son A-bloques. Finalmente, dado que las subgráficas $\langle\alpha_i\rangle_T$ son las componentes biconexas de $\boldsymbol{B}_q$, la propiedad 3 implica que cada punto de articulación pertenece a exactamente dos componentes biconexas. Por corolario 4 se sigue que q es de tipo A_n, lo cual termina la demostración.

5 EFICIENCIA

Esta sección está dedicada a mostrar que, como consecuencia del teorema 3, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 14. *Existe un algoritmo que, para cada forma unitaria simple*

$$q(\check{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j$$

decide correctamente si q es de tipo A_n realizando $O(|V| + |E|)$ operaciones, donde $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $E = \{\{i, j\} | q_{ij} \neq 0, i < \}$.

Como se verá, este algoritmo es una adaptación del recorrido en profundidad. Si el recorrido en profundidad, que genera el árbol T, descubre los vértices de $\boldsymbol{B}_q$ en orden $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$, definimos $d(x_{ik}) = k$. Decimos que un vértice x es finalizado cuando el recorrido sale de ese vértice por última vez. Si el recorrido finaliza los vértices en órden $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}$ decimos que la sucesión $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}$ es el recorrido en postorden de T. Claramente si v es un descendiente de u entonces $d(u) < d(v)$. Para cada vértice u se define

$$\ell(u) = \text{mín}\left\{d(v) \middle| v = u \vee \exists w \in T_u . v\text{——}w \in E\left(\mathbf{B}_q\right)\right\}.$$

Podemos calcular $\ell(u)$ para cada u en postorden como

$$\ell(u) = \text{mín}\begin{cases} d(u) & \\ d(v) & \text{tal que } v \text{ es adyacente a } u; \\ \ell(w) & \text{tal que } w \text{ es hijo de } u. \end{cases}$$

A continuación describimos cómo detectar los puentes o las aristas que definen los ciclos fundamentales maximales durante el recorrido. Supongamos que $\ell(v) = d(u) < d(v)$ para algunos vértices u y v. Si v no tiene ningún hijo, o si $\ell(v) < \ell(w)$ para todo hijo w de v, entonces existe la arista u——v en $\boldsymbol{B}_q$. Por la manera en que ℓ fue definido, no puede haber ninguna otra arista que conecte a un sucesor de v con un antecesor de u (inclusive u), por lo tanto tenemos dos posibilidades: si v es hijo de u entonces v——u es una arista de T que define un puente de $\boldsymbol{B}_q$, y si v no es hijo de u entonces v——u es una arista de retroceso que define un ciclo fundamental maximal.

Para contar cuántos vértices hay en el camino definido por $\alpha_i = u_i$——v_i ponemos la etiqueta $\gamma(u_i) = 1$, al padre de u_i, denotado $\pi(u_i)$, lo etiquetamos con $\gamma(\pi(u_i)) = \gamma(u_i) + 1$, y así sucesivamente hasta haber etiquetado v_i, que debe ser un ancestro de u_i. Este método de conteo podría fallar, en caso de que q no sea de tipo A_n, si existen dos ciclos fundamentales que se intersequen en al menos una arista. Para solucionarlo mostramos cómo detectar si existe tal intersección:

Lema 15. *Dos ciclos fundamentales maximales para un árbol generador en profundidad se intersecan en al menos una arista, en cualquiera de estos dos casos y solamente en cualquiera de estos dos:*

1. Existe un vértice intermedio u con al menos un hijo v tal que $\ell(u) < \ell(v) < d(u)$.
2. Existe un vértice intermedio u con al menos dos hijos v y w tales que $\ell(v) < d(u)$ y $\ell(w) < d(u)$.

Demostración. $\Rightarrow$: Dos ciclos fundamentales maximales solamente se pueden intersecar en un camino de T, digamos x_1——x_2—— $\cdots$ ——x_k, donde $d(x_1) < d(x_2) < \cdots < d(x_k)$. Definimos $u = x_k$ como el último vértice que tienen en común estos ciclos. Si u fuese una hoja de T, entonces ambos ciclos son formados al agregar a T dos aristas de retroceso ancladas en u, pero entonces los vértices de uno de estos ciclos deben estar contenidos en los del otro contradiciendo que eran maximales; así, u tiene al menos un hijo v que pertenece a exactamente uno de estos dos. Sea a——b la arista de retroceso tal que $\ell(u) = d(b)$ y sea a'——b' la arista de retroceso tal que $\ell(v) = d(b')$. Claramente b y b' deben ser ancestros de u, y más aún, deben estar contenidos en el camino $r \to x_1$ donde r es la raíz de T; por lo tanto $\ell(v) < d(u)$ y $\ell(u) < d(u)$. Ahora tenemos dos casos: Si $a = u$ entonces la única posibilidad de que el camino $b \to a$ no esté contenido en el camino $b' \to a'$ es que b sea un antecesor de b', y por lo tanto $\ell(u) = d(b) < d(b') = \ell(v) < d(u)$; para el segundo caso, si $a \neq u$ entonces u debe tener otro hijo w tal que $\ell(w) = d(b) < d(u)$.

$\Leftarrow$: Sea u un vértice con al menos un hijo v tal que $\ell(u) < \ell(v) < d(u)$. Como $\ell(u) \neq \ell(v)$ inferimos que hay dos aristas de retroceso diferentes a——b y a'——b' que definen ciclos fundamentales maximales. Entonces a es u, o un sucesor de u, pero no es un sucesor de v, y u——$\pi(u)$ es compartida por ambos ciclos fundamentales. Si en cambio u tiene doshijos v y w tales que $\ell(v) < d(u)$ y $\ell(w) < d(u)$ claramente la arista u——$\pi(u)$ está compartida por ambos ciclos fundamentales.

Básicamente este lema detecta cuando $\{E(\langle \alpha_i \rangle_T)\}_{i=1}^{t}$ no es una partición de $E(\boldsymbol{B}_q)$, por lo tanto podemos suponer que P es una partición de $E(\boldsymbol{B}_q)$ y calcular $\sum_{i=1}^{t} \binom{n_i}{2}$ para verificar la propiedad 1.

Bajo la misma suposición es fácil detectar si existe un vértice u que viola la propiedad 3: Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ los hijos de u, y $\pi(u)$ el padre de u. Si $k > 2$ por corolario 9 sabemos que q no es de tipo A_n. Si u es la raíz de T o si $k = 1$ entonces claramente u no puede violar la propiedad 3. En otro caso, si u es un vértice intermedio con $k = 2$ entonces dos de las aristas incidentes en u deben pertenecer a la misma subgráfica $\langle \alpha_i \rangle_T$; esto ocurre si y sólo si $\ell(u) = \ell(c_j)$ para un hijo c_j.

Finalmente describimos cómo se verifica la propiedad 2: diremos que $h(u) = 1$ si u es blanco y $h(u) = -1$ si es negro. Recordemos que la arista x_i——x_j es sólida si $q_{ij} = -1$ y punteada si $q_{ij} = 1$. Definimos $h(r) = 1$ para la raíz r, y durante el recorrido en profundidad hacemos lo siguiente: si x_i es el vértice actual y x_j es un vértice adyacente a x_i que todavía no ha sido visitado entonces marcamos $h(x_j) = q_{ij}\, h(x_i)$. De esta manera tenemos la garantía de que todas las aristas de T son sólo de los tres tipos ○····○, ●····● o ○—●; las únicas que podrían no ser de esta forma son las aristas de retroceso de $\boldsymbol{B}_q$. Por lo tanto podemos detectar una violación a la propiedad 2 recorriendo a T en postorden; para cada vértice x_j adyacente al vértice actual x_i tal que $d(x_j) < d(x_i)$ tenemos que la arista x_i——x_j viola la propiedad 2 si y sólo si $h(x_j) \neq q_{ij}\, h(x_i)$.

Dada una gráfica $\boldsymbol{B}_q$, el recorrido en profundidad (sin modificaciones) se puede implementar con complejidad temporal $O(|V| + |E|)$ (ver [6]), donde $V = V(\boldsymbol{B}_q)$ y $E = E(\boldsymbol{B}_q)$, tomando la representación por listas de adyacencia de $\boldsymbol{B}_q$, que consiste de una sucesión $(L_i)_{i=1}^{n}$ donde cada $L_i = \{(x_j, q_{ij}) | q_{ij} \neq 0, i \neq j\}$.

Las modificaciones aquí propuestas se pueden implementar recorriendo L_j para cada x_j durante el recorrido en postorden. Estas modificaciones aumentan la complejidad en $\sum x_j \in V\, |L_j| = \sum_{u \in V} |Ady(u)| = O(|E|)$; por lo tanto la complejidad se mantiene en O(|V| + |E|). Con esto termina la demostración.

6 IMPLEMENTACIÓN

En esta sección se describe cómo implementar las modificaciones propuestas en la sección anterior de forma recursiva y en pseudocódigo, pero no es difícil convertir este pseudocódigo en un programa iterativo. En lo que resta suponemos que G está representado con listas de adyacencia; es decir, $G = (L_i)_{i=1}^{n}$ donde cada $L_i = \{(x_j, q_{ij}) | q_{ij} \neq 0, i \neq j\}$ y $V(G) = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. VERDADERO, FALSO son las constantes booleanas y ninguno es una constante especial.

```
PREVISITAR(G, x_i) :
    d(x_i) ← t
    t ← t + 1

POSVISITAR(G, x_i) :
    ℓ(x_i) ← d(x_i)
    C ← ∅
    para cada (x_j, q_ij) ∈ L_i :
        si h(x_j) ≠ q_ij h(x_i) : devolver FALSO
        si π(x_j) = x_i :
            C ← C ∪ {x_j}
            si |C| > 2 : devolver FALSO
            si ℓ(x_j) ≤ ℓ(x_i) :
                ℓ(x_i) ← ℓ(x_j)
                γ(x_i) ← γ(x_j) + 1
        en otro caso, si d(x_j) < ℓ(x_i) :
            ℓ(x_i) ← d(x_j)
            γ(x_i) ← 1
    para cada x_j ∈ C :
        si ℓ(x_i) < ℓ(x_j) < d(x_i) : devolver FALSO
    si |C| = 2 :
        Sean x_j y x_k los elementos de C
        p_1 ← (ℓ(x_j) < d(x_i) ∧ ℓ(x_k) < d(x_i))
        p_2 ← (ℓ(x_j) ≠ ℓ(x_i) ∧ ℓ(x_k) ≠ ℓ(x_i))
        si p_1 ∨ p_2 : devolver FALSO
    si π(x_i) ≠ NINGUNO ∧ ℓ(x_i) = d(π(x_i)) :
        e ← e + C(γ(x_i)+1, 2)
    devolver VERDADERO

VISITAR(G, x_i) :
    visitado(x_i) ← VERDADERO
    PREVISITAR(x_i)
    para cada (x_j, q_ij) ∈ L_i :
        si ¬visitado(x_j) :
            π(x_j) ← x_i
            h(x_j) ← q_ij h(x_i)
            si ¬VISITAR(G, x_j) : devolver FALSO
    si ¬POSVISITAR(x_i) : devolver FALSO
    devolver VERDADERO

ES-DYNKIN-AN(G) :
    para cada x_i ∈ V(G) :
        visitado(x_i) ← FALSO
        π(x_i) ← NINGUNO
        γ(x_i) = 0
    e ← 0
    t ← 0
    h(x_1) ← 1
    VISITAR(G, x_1)
    para cada x_i ∈ V(G) :
        si ¬visitado(x_i) : devolver FALSO
    e' ← 0
    para cada L_i ∈ G : e' ← e' + |L_i|
    e' ← e'/2                    // e' = |E(G)|
    si e ≠ e' : devolver FALSO
    devolver VERDADERO
```

REFERENCIAS

1. Barot, M., Rivera, D. Generalized serre relations for lie algebras associated with positive unit forms. *Journal of pure and applied algebra*. 2007, 211(2):360-373.
2. Gabriel P., Vladimirovich, A. Representations of finite-dimensional algebras. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. 1997, 73 (Springer), 57.
3. Barot, M. A characterization of positive unit forms. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 1999, 5, 87-93.
4. Kammer, F., Täubig, H. *Graph connectivity*. München: Technical report, 2004.
5. Grimaldi, RP. *Matemáticas discreta y combinatoria*. México: Pearson, 1998.
6. Hopcroft, J., Tarjan, R. Algorithm 447: efficient algorithms for graph manipulation. *Communications of the ACM*. 1973, 16, 372-378.

Acerca de los autores

Antonio Daniel Rivera López se graduó como Doctor en Matemáticas por la Universidad Nacional Autónoma de México en 2006. Actualmente es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, donde da clases de matemáticas y ciencias de la computación. Realiza investigación en teoría de representaciones de álgebras y álgebra computacional.

Mario Alberto Abarca Sotelo se graduó como Licenciado en Ciencias de la Computación por la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM) en 2011. Actualmente es estudiante del Doctorado en Ciencias con área terminal en Modelado Computacional y Cómputo Científico. Ha impartido algunos cursos de computación en la Facultad de Ciencias de la UAEM y apoyado otros en el Instituto de Matemáticas de la unam.