Programación Matemática y Software (2009)
Vol. 1. No 1. ISSN: 2007-3283

Recibido: 10 de Junio de 2008/Aceptado: 3 de Septiembre de 2008
Publicado en línea: 26 de junio de 2009

Selección de una Cartera de Inversión en la Bolsa Mexicana de Valores por Medio de un Método de Programación Lineal

José Crispín Zavala-Díaz[A], Dalia Vianey García-Villagomez

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, [1]Facultad de Contaduría, Administración e Informática, Avenida Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca, México. crispin_zavala@uaem.mx, vianeyvillagomez@yahoo.com

Resumen. En este artícu lo se presenta el modelo matemático para la selección de una cartera de inversión con el máximo rendimiento y el mínimo riesgo, el cual es resuelto utilizando el método SIMPLEX. Los dos problemas se resuelven en forma independiente y se utilizan las reglas de inversión para obtener la mejor cartera de inversión con los resultados de ambos problemas. Con el objetivo de aplicar nuestro modelo se resuelve la selección de una cartera de inversión con tres acciones de la Bolsa Mexicana de Valores y se comparan los resultados con los obtenidos por un método estadístico generalmente utilizado para este fi n. Los resultados nos muestran que es posible determinar una cartera de inversión con el mínimo riesgo al tiempo cero, y que la cartera de inversión con el método estadístico seleccionado no corresponde a la solución determinada por el modelo de optimización.

Palabras clave: programación lineal, cartera de inversión, modelo de selección de acciones.

1. Introducción

Las empresas que requieren re cursos (dinero) para financiar su operación o proyectos de expansión pueden obtenerlo a través del mercado bursátil mediante la emis ión de valores, co mo son las acciones, las obligaciones , el papel comerci al, etc, disponibles en la Bolsa Mexicana de Valores Cada una de estas acciones equivale a poseer una parte de la empresa y su valor puede depender de la tasa de interés, así com o del creci miento de la econom ía o de un sector en particular. En general, si la economía crece las

[A] Autor de correspondencia

empresas ganan más dinero y la acción va a tener un precio mayor. Pero, es una regla que tiene numerosas excepciones, por tanto cada acción tiene un riesgo asociado.

Para obtener un rendimiento a un riesgo aceptable la inversión se debe diversificar en una cartera de inversión. Una cartera de inversión es una combinación de activos o títulos individuales, de tal forma que una combinación de ellos casi siempre sea menos arriesgada que cualquier título individual. Por tanto, se pretende que la selección de una cartera de inversión sea una combinación de acciones que disminuya el riesgo y aumente la utilidad.

Desde el punto de vista teórico, la existencia de este equilibrio riesgo-rendimiento es básica para los modelos de evaluación de activos. Mientras que desde el punto de vista práctico, se debe tener la capacidad de colocar los resultados absolutos en el contexto de características de riesgo-rendimiento de un programa de inversión.

Los modelos de optimización son usados en casi todas las áreas para la toma de decisiones, donde el modelo matemático consiste de una función objetivo y un conjunto de restricciones en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones. En este trabajo mostramos la forma de obtener la función objetivo y sus restricciones a partir de los datos disponibles en la página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores. Los resultados de nuestro modelo son comparados contra los datos obtenidos por medios estadísticos tradicionales que se basan principalmente en la variación del coeficiente de la correlación [1,3,6].

En la sección dos se presenta una descripción de los métodos y criterios que se utilizan actualmente para la selección de una cartera de inversión. En la sección tres se define el modelo matemático de optimización y sus restricciones. En la sección cuatro se comprueba su validez con un número reducido de acciones. En la sección cinco se mencionan las conclusiones a que se llegaron con el presente modelo, donde concluimos que los modelos de optimización tendrán un futuro promisorio para la selección de una cartera de inversión.

2. Descripción de los métodos de inversión

2.1. El proceso de inversión

El proceso de inversión implica la táctica de decidir sobre la selección de qué invertir en el mercado de valores negociables, qué tan vastas deben ser esas inversiones y cuándo hacerlas. La base del proceso de la inversión es un procedimiento con los cinco pasos siguientes [1]:

1. **Política de inversión**. Consiste en determinar los objetivos del inversionista y la cantidad de su riqueza que está dispuesto a invertir.

2. **Análisis de Valores**. Implica examinar varios valores individuales (o grupos de valores) dentro de amplias categorías de valores financieros identificados previamente. Una razón para este análisis es identificar aquellos valores que parezcan estar mal valuados.

3. **Construcción de la cartera.** Implica la identificación de acciones específicas en las cuales invertir, así como la determinación de cuanto invertir en cada una. Las cuestiones de selectividad, *timing* y diversificación deben ser tratadas por el inversionista. La selectividad, también conocida como micro pronóstico, se refiere al análisis de valores y se enfoca en el pronóstico de los movimientos de precios de valores individuales. El *timing*, también conocido como macro pronóstico, implica el pronóstico de los movimientos de precio de las acciones ordinarias respecto a los valores de ingreso fijo, como los abonos corporativos y las letras del tesoro. La diversificación implica la construcción de la cartera del inversionista de tal manera que se minimice el riesgo sujeto a ciertas restricciones.

4. **Revisión de la cartera**. Se refiere a la repetición periódica de los tres pasos anteriores. Con el tiempo se puede cambiar los objetivos de la inversión, lo que a su vez haría que la cartera actual fuera menos que óptima.

5. **Evaluación del desempeño de la cartera**. Consiste en determinar periódicamente el rendimiento ganado por la cartera y el riesgo que

corre el inversionista. Por tanto, se re quieren medidas adecuadas de rendimiento y riesgo así como estándares relevantes.

En este trabajo nos enf ocamos a realizar un m icro pronóstico para obtener el mejor rendimiento a un riesgo menor.

2.2. Métodos utilizados para la selección de la cartera de inversión.

2.2.1. Método de Markowitz.

Inicia con la suposición de que contamos con una cantidad determinada de dinero para invertir en el presen te. Este dinero se invertirá durante un lapso de tiem po, conocido com o período de tenencia. Al final del período de tenencia se venderán lo s valores que se com praron y se utilizarán los beneficios para los gastos, la reinversión en varios valores o ambas cosas. En este punto, el método de Markowitz se puede aplicar nuevamente a los beneficios que se van a reinvertir. Por tanto, esté método es para un solo periodo. En $t = 0$ se decide qué valores comprar y conservar hasta que $t = 1$. Entonces, en $t = 1$ se decide de nuevo qué valores conservar hasta $t = 2$, y así sucesivam ente. Al buscar tanto maximizar el rendim iento esperado com o minimizar la incertidum bre (es decir, el riesgo), se tienen dos objetivos en conflicto que se deben sopesar al tomar la decisión de compra cuando $t = 0$. En consecuencia,

al tener estos dos objetivos en conflicto se debe diversificar la compra no sólo un valor sino de varios [3].

La rentabilidad de una c artera se de fine por la media ponderada de las rentabilidades esperadas de los n valores que la co mponen, mientras que el riesgo es función de los tres factores que se enuncian a continuación:

a) La proporción o ponderación de cada valor en el portafolio.
b) La varianza o la desviaci ón estándar de la rentabi lidad de cada valor.
c) La covarianza o el c oeficiente de correla ción entre las rentabilidades de cada par de valores.

En el método de Markowitz las decisi ones sólo se basan en los rendim ientos esperados y en las desviaciones estándar. Es decir, se esti ma el rendimiento esperado y la desviación e stándar de cada cartera y se escoge la “mejor” con base en las siguientes suposiciones:

Primera suposición, cuando se tiene q ue elegir entre dos carteras sim ilares, siempre se escogerá la que tenga el ren dimiento esperado más alto, es decir, siempre se preferirá los niveles más altos de riqueza final y no los niveles más bajos.

Segunda suposición, dadas las dos carteras con la misma desviación estándar, se escogerá la que tenga el rendimiento esperado más alto [3].

El método de Markowitz se desarrolló considerando que el inversor prefiere la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por tanto, una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente programa cuadrático paramétrico:

$$\min \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{ij} \qquad \textbf{(1)}$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Donde x_i es la incógnita del problem a, esto es la pro porción del presupuesto destinado al activo financiero i, $\sigma^2(R_p)$ es la varianza de la cartera p, ρ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j. $E(R_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera *p*, de tal forma que al variar el parámetro V^* obtendremos en cada caso el conjunto de proporciones x_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E(R_p),\ \sigma^2(R_p)]$ o combinaciones rentabilidad- riesgo de todas las carteras eficientes es denominado «frontera eficiente». Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima.

Los problemas fundamentales del modelo de Markowitz.

Actualmente los problemas para la utilización del modelo de Markowitz no son computacionales, sino que tienen que ver con los supuestos de partida [3]. El modelo de Markowitz parte de 5 hipótesis fundamentales, y cuyo cumplimiento tiene una gran trascendencia en cuanto a la validez de los resultados obtenidos con el mismo:

i. Se conoce la rentabilidad esperada de cada uno de los activos financieros considerados.

ii. Se conoce y se supone constante en el tiempo la varianza de cada uno de los activos financieros y la covarianza entre ellos.

iii. Los rendimientos de los diferentes activos financieros se comportan de acuerdo con una distribución normal.

iv. Los inversores actúan de forma racional.

v. El modelo optimiza para un solo período [3].

Si se supone que se conoce la rentabilidad esperada, la varianza y la covarianza de los diferentes activos financieros. El problema es cuando, en intervalos relativamente cortos de tiempo (por ejemplo un año), son muy grandes los valores de las varianzas con respecto a las rentabilidades esperadas. Esto significa que el error de predicción en esos períodos es muy grande. Por otra parte, el modelo de Markowitz es extremadamente sensible a los valores de las rentabilidades esperadas, de tal forma que unas pequeñas variaciones de las rentabilidades esperadas suponen carteras con estructuras muy diferentes (o por lo menos aparentemente muy diferentes) en su composición.

2.2.2. Series de tiempo.

El análisis de series de tiempo comprende un intento de identificar los factores que ejercen influencia sobre cada uno de los valores periódicos de una serie. Este procedimiento de identificación se denomina "descomposición". Cada componente se identifica por separado de tal manera que la serie histórica pueda proyectarse al futuro y utilizarse en pronósticos tanto a corto com o a largo plazo. Los cuatro co mponentes que se encuentran en una serie histórica son: Tendencia, Varia ciones Cíclicas, Variaciones Estaciónales y Fluctuaciones Irregulares. [4]

La tendencia son m ovimientos de largo plazo en una serie histó rica que se pueden describir mediante una ecuación de una líne a recta o curva. Consiste de un patrón de movimientos ascendentes o descendentes, generales o persistentes, a largo plazo.

Dado que en el análisis de la tendencia la variable independiente es el tiempo, se elaboraron las tablas de los indicadores disponibles a todo el público en la página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores: cambios de precios de compra y venta, cambios en el INPC y volumen de acciones. Con estos tres indicadores se trato de elaborar un modelo lineal para realizar el pronóstico, pero las correlaciones obtenidas son muy bajas y no es posible utilizarlas para pronósticos. Por tanto este método no se c onsidero para el pronóstico de la selección de la cartera de inversión.

2.2.3. Modelo Black & Scholes

El modelo de valuación de opciones original fue desarrollado por Black & Scholes para el cálculo d el valor de una opción de co mpra europea que no paga dividendos; las variables de este modelo son precio de la acción, precio de ejercicio, el tiempo de vencimiento, la varianza del precio de la acción y la tasa libre de riesgo. Merton m odificó el modelo original para incluir el factor de dividendos, que ha sido am pliamente aplicado para cal cular opciones de empresas que pagan dividendos y que muchos investigadores han comprobado su utilidad [3].

Algunos investigadores como Simons (1997) descubrieron las debilidades del modelo, como es la sobrestim ación del valor dado, ya que considera que los rendimientos de los valores se distribuy en normalmente; asimismo, para l a aplicación del modelo se debe conocer la volatilidad de la acción, a través de una estimación estadística que puede estar sujeta a errores.

El Modelo de Black & Scholes aplicado a la valuación de empresas se basa en el análisis contingente, que se refiere a una técnica para determinar el precio de un valor cuyo resultado depende del precio de uno o más valores. El origen del análisis contingente es el modelo de opciones de Black & Scholes, el cual contiene elementos cualitativos con un gran significado práctico. Esta teoría sostiene que las deudas corporativas, en general, pueden ser vistas como combinaciones de simples contratos de opciones [5].

La aplicación empírica del modelo de valuación de Black & Scholes muestra una sobreestimación consistente del valor de las empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores [8]. Asimismo, este modelo tiende a arrojar valores mayores y positivos en comparación con el precio de mercado, esto se interpreta como una sobre valuación del valor de la empresa. La causa es que el modelo considera como variable al valor del activo total para determinar el valor de la empresa, que suele ser muy grande puesto que trabajan con una fuerte inversión en capital de trabajo y activo fijo.

Por otra parte, al considerar en este modelo a la volatilidad como variable para el cálculo del valor, define un riesgo alto cuando los valores individuales también son muy altos. Asimismo al considerar el apalancamiento se logran también valores elevados, ya que se transfiere el valor del acreedor al accionista.

La aplicación de este modelo a un conjunto de empresas mexicanas durante un periodo permite definir que hay que tener cuidado en la aplicación del mismo para efectos de valuación, considerando entre otros aspectos las características propias de la empresa como son la inversión fija y el apalancamiento. Además, se tiene que tomar en cuenta que se ha demostrado que es un modelo que privilegia el valor cuando el riesgo es elevado.

Las conclusiones mencionadas sobre este modelo se basan en resultados obtenidos en aplicaciones realizadas por diferentes autores de los libros consultados [3,5], ejemplos que no fueron realizados en éste trabajo, pero se consideró el modelo de valuación Black & Scholes a causa de las variables que utiliza, ya que conocer estas variables nos indicaría cuales considerar para la elaboración de nuestro modelo. Se pretendía considerar los mismos datos e información que toma en cuenta el modelo Black & Scholes para realizar su cálculo y obtener el Valor de la Empresa, pero en sus ecuaciones intervienen variables que dependen de la información que se obtiene de los Anuarios

Bursátiles y Financieros de la Bolsa Mexicana de Valores, ést os no están disponibles a través de la pagina de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores. Por tanto se descarto el uso del m odelo Black & Acholes para co mparar nuestros resultados, ya que nuestro objetivo es utilizar la información pública disponible en dicha página.

2.2.4. Fórmulas Financieras para combinación de portafolios de inversión. (Capital Assets Pricing Model CAPM).

Este método se fundamenta en que todo activo financiero puede ser descrito a partir de dos est adígrafos: un estadí grafo de posición, la media, que proporciona una medida del rendimiento prom edio del activo en un determinado periodo; y un estadígrafo de dispersión, la desviación estándar, de los distintos rendim ientos respecto al rendi miento promedio, que proporciona una medida del riesgo del activo financiero [6].

El rendimiento medio de cada una de las acciones se calcula con la fórmula de un promedio aritmético con los rendimientos de cada acción en cada periodo:

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{i_j}}{m} \qquad (2)$$

Donde R_i es el rendimiento promedio de la acción i, r_i es el rendimiento de la acción i en cada periodo j y m es el número de periodos considerados.

El riesgo asociado a la acción individual se deter mina a tr avés de la desviación estándar de l os rendimientos, cuya fórmula se presenta a continuación.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} \left(r_{i_j} - R_i\right)^2}{m-1}} \qquad (3)$$

Adicionalmente a los estadígrafos de posición y dispersión, para la conformación de portafolios es necesa rio contar con uno adi cional: la covarianza entre los rendimientos de los activos financieros, la cual esta dada por:

$$\rho^{12} = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{1_j} r_{2_j} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} r_{1_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} r_{2_j}\right)}{m}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(r_{1_j} - R_1\right)^2 \sum_{j=1}^{m}\left(r_{2_j} - R_2\right)^2}} \qquad (4)$$

Selección del Portafolios de activos con riesgo

El portafolio de inversión se conforma asignando porcentajes diversos del monto de inversión a determinados activos financieros. El portafolio resultante, al igual que las acciones individuales, será identificado por el rendimiento medio y su riesgo asociado. La condición para la asignación de los porcentajes a cada activo financiero es que su suma deberá igual al 100%. El rendimiento y riesgo del portafolio de inversión se determinan con las ecuaciones siguientes:

$$Rendimiento = \sum_{i=1}^{n} W_i R_i \qquad (5)$$

$$Riesgo = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(W_i^2 \sigma_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\left(W_i W_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right)} \qquad (6)$$

Donde W_i es el % de inversión en la acción *i*. R_i: Rendimiento promedio de la acción *i*. σ_i: Riesgo o desviación estándar de la acción *i*. ρ_{ij}: Correlación entre las acciones *i, j*. *n*: número de acciones

El problema de aplicar estas ecuaciones es el número de acciones y los porcentajes que analicemos. Por ejemplo, si se tiene n tres acciones y se va analizar cada 10%, se tendrá una complejidad n^3 ya que se tiene que realizar los cálculos para cada porcentaje, por tanto se tendrán *1,000* aplicaciones. Ahora, si se requiere que se analice para cada 1% se tendrán $1X10^6$ cálculos. Pero si se requiere analizar 10 acciones, la complejidad es de n^{10}, por lo que hace al problema prácticamente no computable.

3. Modelo matemático para seleccionar la cartera de inversión por medio de la programación lineal.

La programación lineal es un proceso de optimización con una sola función objetivo que se expresa matemáticamente [7]. El adjetivo lineal significa que todas las funciones del modelo y variables deben ser lineales. En el problema de la selección de la ca rtera de inversión se tienen d os funciones objetivo, la primera es maximizar el rendimiento y la segunda, no m enos importante que la primera, es disminuir el riesgo.

Para la construcción de nuestro modelo matemático se consideraron los aspectos sobresalientes de los modelos de Markowitz y de CAPM.

La selección de la cartera de inversión se hace en el momento $t = 0$, mientras que en el siguiente momento $t=1$ se hace otra nueva selección. De esos dos modelos consideramos la magnitud promedio del rendim iento y del riesgo. Del modelo de Markowitz consideramos el planteamiento del problema de optimización con un parámetro en una restricción, nuestro modelo lo hace de forma similar, donde el parámetro modifica la magnitud de la restricción o las restricciones para deter minar la solución. Este problem a es similar al *knapsack problem* con un parámetro [9].

Del modelo de CAPM seguimos el procedimiento para la selección de la cartera optima, el cual consiste de la diferencia mínima entre el riesgo y el rendimiento, ya que el riesgo generalmente es mayor al rendimiento.

Con nuestro modelo matemático eliminamos la dependencia de la covarianza, ésta indica estadísticamente la relación en el tie mpo entre el rendimiento de dos acciones. En los modelos de Markowitz y CAPM, si la covarianza entre el rendimiento de dos acciones es baja, entonces, es posible, que esas dos acciones formen parte de la solución, lo anterior de cierta forma indica que el comportamiento del rendimiento entre ambas acciones no están r elacionadas. Pero el que t engan una covarianza baja no nos muestra si esos rendim ientos de esas dos acciones son estadísticamente independientes [10].

En los modelos anteriores solo se consid era el rendimiento y el riesgo de las acciones, ignorando las variables e in dicadores disponibles en l a página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), alrededor de 23 [8]. La duda ahora es ¿Que otras variables o indicadores tenemos que considerar en el modelo? La respuesta puede ser: Todas las variables e indicadores publicados en esa página, la inclusión de estas podría ser en conjunto, en form a individual o una combinación de ellas. El problema nuevo es definir cuáles variables o indicadores tienen influenc ia en el pronóstico de la selección de una cartera de inversión.

En este trabajo se decidió incluir solo una variable más a las consideradas por los modelos previos (rendimiento y riesgo), este es el precio de venta de la acción. La decisión es a causa de que a partir de éste s e derivan las dos variables recomendadas p or Markowitz y por el método CAPM. Una vez definidas las variables, ot ro problema al cual nos enfrentam os es definir la magnitud del parámetro de las restricciones y sus cambios. Para esto hacemos las suposiciones siguientes:

Primera suposición. La cantidad de dinero requerida mínima es el costo de la acción mas barata, a partir de esta cantidad se llega a la cantidad de dinero de la acción más cara.

Segunda suposición. El riesgo mínimo de la cartera de inversión es el riesgo de la acción que tenga el menor de todas las acciones y éste variará hasta el riesgo más alto de la acción correspondiente.

Tercera suposición. De forma similar a l a suposición del riesgo, el rendimiento mínimo de la cartera de inversión es el rendim iento de la acción que tenga el menor rendimiento de todas las accio nes y éste variara hasta el rendimiento más alto de la acción correspondiente.

Con las sup osiciones anteriores se formulo el modelo que se presenta a continuación:

Maximizar $z_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$ (7)

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(Pv_i - Pv_{\min}\right) \leq \lambda_1 \left(Pv_{\max} - Pv_{\min}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\sigma_i - \sigma_{\min}) \le \lambda_2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

$$x_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Donde x_i es el deci mal de la acción *i* que debe comprarse y es una variable real $0 \le x_i, \le 1$, $x_i = 0$ cuando la acción no forma parte de la cartera de inversión. λ_1, λ_2: son variables que utilizamos para recorrer todo el espacio de soluciones y su valor es $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$, Pv_i es el precio de venta de la acción *i*.

3.2. El modelo de minimizar el riesgo es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \qquad \textbf{(8)}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(Pv_i - Pv_{\min}) \ge \lambda_1(Pv_{\max} - Pv_{\min})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(R_i - R_{\min}) \ge \lambda_2(R_{\max} - R_{\min})$$

$$x_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Donde las variables son las mismas que en el problema de maximizar.

4. Selección de la cartera de inversión.

La selección de la carter a de inversión se hace para las ac ciones de tres empresas, donde la solución de los modelos matemáticos de maximización del rendimiento (7) y minimización del riesgo (8) se resuelven independientemente uno del otro con el método SIMPLEX, para lo cual se utilizó el programa WINQSB.

De la página de Internet de la BMV se eligieron las acciones de 3 diferentes empresas que regularmente se encuentran a la alza o entre las más negociadas. Los datos considerados de las acciones son de Julio del 2005 a Febrero de 2007, los valores del rendimiento y la desviación estándar se obt uvieron con las ecuaciones (2) y (3), y sus valores se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Rendimiento y riesgo de las empresas de julio 2005 a febrero 2007

Variable	**Empresa**	**Rendimiento (%)**	**Precio de venta**	**Riesgo (%)**
x_1	GMEXICOB	5.053	76.00	**9.289**
x_2	WALMEX V	2.230	39.67	**5.985**
$\boldsymbol{x_3}$	**GMODELOC**	**2.016**	**59.11**	**5.381**

Es importante observar que el riesgo es ma yor al rendimiento, lo que implica que el mayor rendimiento con el menor riesgo se encontrará cuando la diferencia entre ambas es la menor.

Resultados del problema de maximización del rendimiento

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1 y en la tabla 2

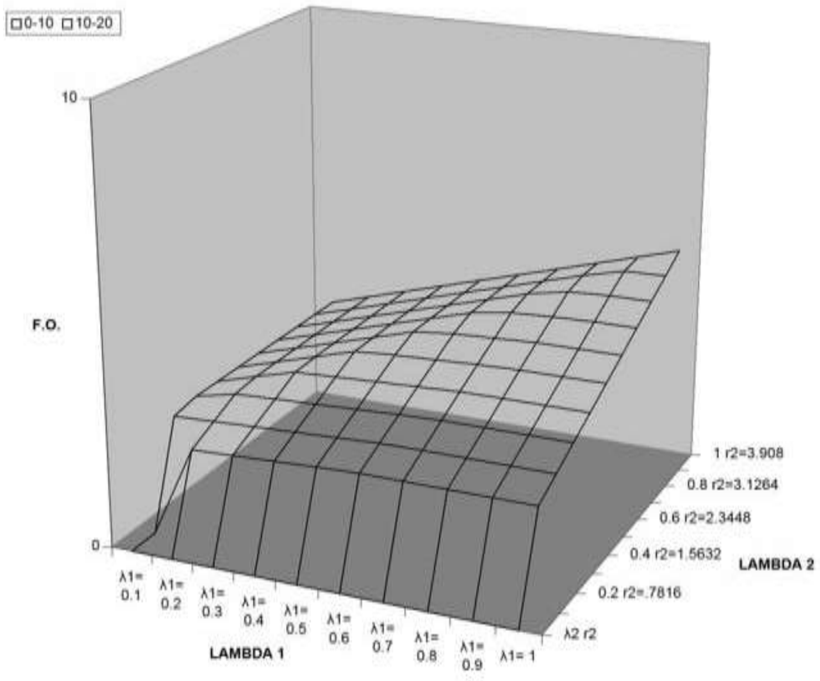

Figura 1. Gráfica del rendimiento óptimo para diferentes λ_1 *y* λ_2

Tabla 2 Rendimiento óptimo para diferentes λ_1 *y* λ_2

λ_1	λ_2=**0.1**	λ_2=**0.2**	λ_2=**0.3**	λ_2=**0.4**	λ_2=**0.5**	λ_2=**0.6**	λ_2=**0.7**	λ_2=**0.8**	λ_2=**0.9**	λ_2=**1.0**
0.1	-----	2.1591	2.2012	2.2433	***2.2854***	2.3197	2.3197	2.3197	2.3197	**2.3197**
0.2	2.4012	2.4433	2.4851	2.5274	2.5695	2.6116	2.6234	2.6234	2.6234	**2.6234**
0.3	2.5123	2.7274	2.7695	2.8116	2.8536	2.8857	2.9271	2.9271	2.9271	**2.9271**
0.4	2.5123	2.7946	3.0536	3.0957	3.1378	3.1799	3.2219	3.2308	3.2308	**3.2308**
0.5	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.4219	3.4640	3.5061	3.5345	3.5345	**3.5345**
0.6	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.7481	3.7902	3.8323	3.8382	**3.8362**

0.7	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.0744	4.1164	4.1419	**4.1419**
0.8	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.2061	4.4006	4.4426	**4.4456**
0.9	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.2061	4.4884	4.7268	**4.7493**
1.0	**2.5123**	**2.7946**	**3.0769**	**3.3592**	**3.6415**	**3.9238**	**4.2061**	**4.4884**	**4.7707**	**5.0530**

Resultados del problema de minimización del riesgo

Los resultados se muestran en la figura 2 y en la tabla 3.

Tabla 3 Riesgo mínimo para diferentes λ_1 y λ_2

λ_1	λ_2=**0.1**	λ_2=**0.2**	λ_2=**0.3**	λ_2=**0.4**	λ_2=**0.5**	λ_2=**0.6**	Λ_2=**0.7**	λ_2=**0.8**	λ_2=**0.9**	λ_2=**1.0**
0.1	5.7718	5.7718	5.7718	5.7718	***5.7718***	5.9266	6.7672	7.6078	8.4484	**9.2890**
0.2	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.7672	7.6078	8.4484	**9.2890**
0.3	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.7672	7.6078	8.4484	**9.2890**
0.4	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	7.6078	8.4484	**9.2890**
0.5	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.6078	8.4484	**9.2890**
0.6	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	8.4484	**9.2890**
0.7	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.4484	**9.2890**
0.8	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	**9.2890**
0.9	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	**9.2890**
1.0	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**	**9.2890**

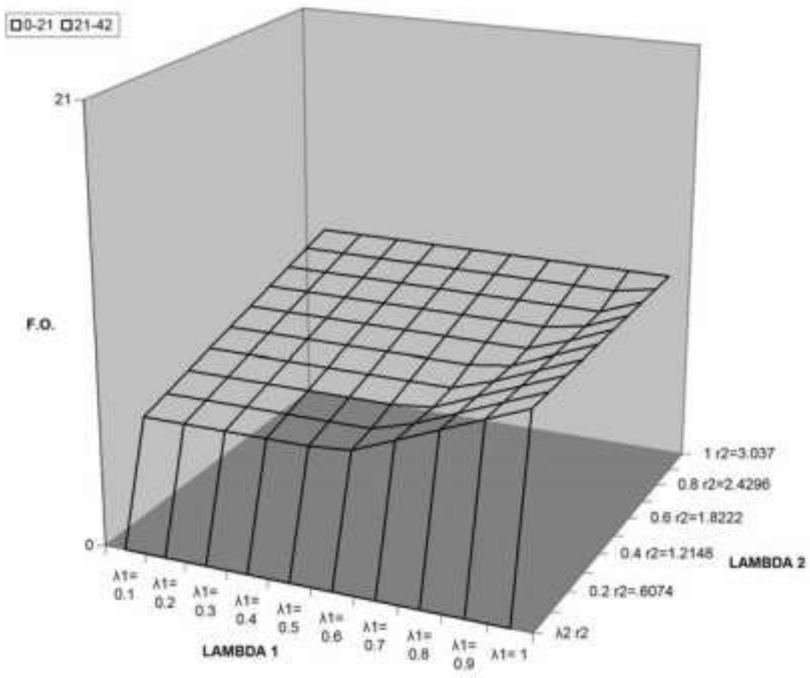

Figura 2. Gráfica del riesgo mínimo para diferentes λ_1 *y* λ_2

De las tablas 2 y 3 se obtiene la menor diferencia entre el riesgo y el rendimiento, de forma similar a como se hace en la selección de la cartera de inversión con el modelo CAPM. Es importante notar que en cada uno de los problemas, de maximización del rendimiento y minimización del riesgo, se determinan los valores de λ_1 y λ_2, las cuales son diferentes para cada problema y corresponden a distintos porcentajes de cada una de las acciones. En la figura 3 y en la tabla 4 se muestran los resultados de las diferencias entre el rendimiento y el riesgo.

Tabla 4. Diferencias entre el riesgo y rendimiento

λ_1	λ_2=**0.1**	λ_2=**0.2**	λ_2=**0.3**	λ_2=**0.4**	λ_2=**0.5**	λ_2=**0.6**	Λ_2=**0.7**	λ_2=**0.8**	λ_2=**0.9**	λ_2=**1.0**
0.1	-------	3.6127	3.5706	3.5285	***3.4884***	3.6069	4.4475	5.2881	6.1287	**6.9693**
0.2	3.7614	3.7193	3.6772	3.6352	3.5931	3.5510	4.1438	4.9844	5.8250	**6.6656**
0.3	4.0411	3.8260	3.7839	3.7418	3.6998	3.6577	3.8401	4.6807	5.5213	**6.3619**
0.4	4.4319	4.1496	3.8906	3.8485	3.8064	3.7643	3.7223	4.3770	5.2176	**6.0582**
0.5	4.8227	4.5404	4.2581	3.9758	3.9131	3.8710	3.8289	4.0733	4.9139	**5.7545**
0.6	5.2135	4.9312	4.6489	4.3666	4.0843	3.9777	3.9356	3.8935	4.6102	**5.4508**
0.7	5.6043	5.3220	5.0397	4.7574	4.4751	4.1928	4.0422	4.0002	4.3065	**5.1471**
0.8	5.9951	5.7128	5.4305	5.1482	4.8659	4.5836	4.3013	4.1068	4.0648	**4.8434**
0.9	6.3859	6.1036	5.8213	5.5390	5.2567	4.9744	4.6921	4.4098	4.1714	**4.5397**
1.0	**6.7767**	**6.4944**	**6.2121**	**5.9298**	**5.6475**	**5.3652**	**5.0829**	**4.8006**	**4.5183**	**4.2360**

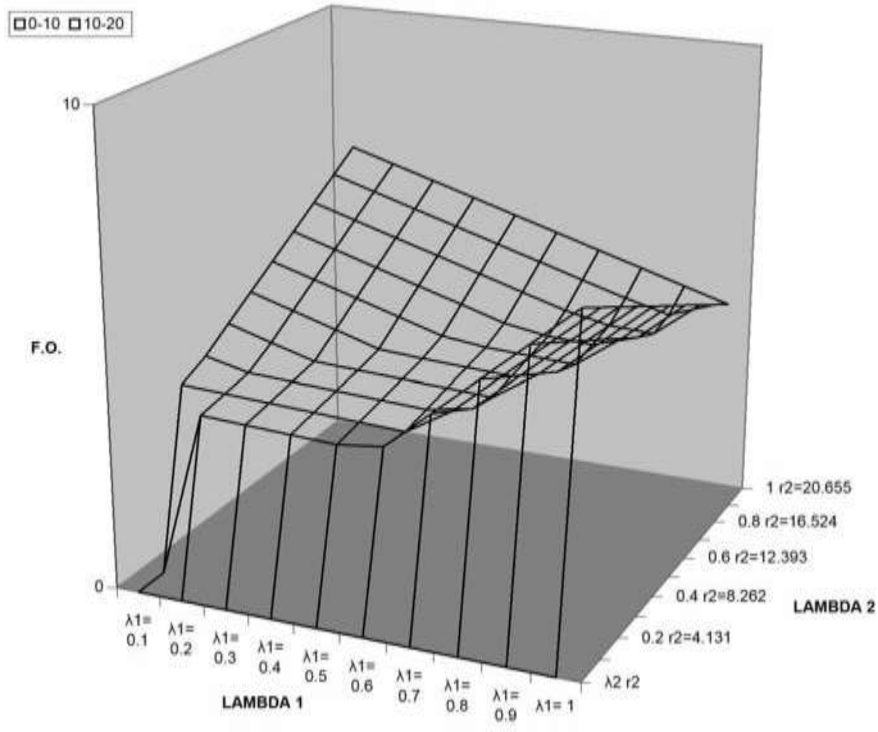

Figura 3. Gráfica de diferencias entre el rendimiento y riesgo

En la gráfica 3 se aprecia que existe u n área donde la diferencia es mínima, mientras que en la tabla 4 se deter minan los valores de λ_1 y λ_2 para es a diferencia. Los valores de esas variables corresponden a diferentes porcentajes de cada una de las acciones, los que se m uestran en la tabla 5. En el renglón tres de esa misma tabla se muestran los porcentajes obtenidos con el modelo CAPM, mientras que en el renglón cuatro se muestran los valores del rendimiento y riesgo sin considerar la "amortiguación" dada por los valores de covarianza baja.

Tabla 5. Comparación de los resultados del modelo matemático y el CAPM

Modelo		***X_1*** (%)	***X_2*** (%)	***X_3*** (%)	**Sumas** (%)	**Diferencias (%)**
Minimización del riesgo	Contribución	10.00	0.000	90	100	
	REND	0.505	0.000	1.814	2.320	3.452
	RIESGO	0.929	0.000	4.843	5.772	
Maximización del rendimiento	Contribución	7.920	13.44	78.64	100.0	
	REND	0.400	0.300	1.585	2.285	3.486
	RIESGO	0.736	0.804	4.232	5.772	
CAPM	Contribución	30.00	40.00	30	100	
	REND	1.5159	0.892	0.6048	3.0127	1.9712
	RIESGO	------	-----	-----	**4.9839**	
CAPM con valor real del riesgo al momento *t=0*	Contribución	30.00	40.00	30	100	
	REND	1.5159	0.892	0.6048	3.0127	3.7823
	RIESGO	2.7867	2.3940	1.6143	**6.7950**	

Los resultados de la tabla 5 nos muestran, renglón 3 y 4, que el considerar la covarianza como una variable para determ inar una cartera de inv ersión no es la mejor, si únicamente nos basamos en la diferencia real entre el rendim iento y el riesgo de la cartera de inversión en el tiem po $t=0$. Con ese porcentaje d e riesgo real es posible obtener rendimientos mayores, como se puede observar en la tabla 3, donde los v alores con ese riesgo pueden tener un rendim iento entre 3% y 4% (λ_1).

Los resultados de la tabla 5 ta mbién nos muestra que en el ti empo cero la mejor cartera de inversión está dada por la función de m inimización del riesgo, si nos basamos en la menor diferencia, la cua l es ligeramente inferior que la diferencia obtenida del problem a de maximización del rendimiento de 0.034%.

Es importante resaltar que los porcentaj es de cada acción son diferentes para cada solución del problema de la selección de la cartera de inversión. Lo cual era de esperarse ya que las variables son reales y admiten una cantidad infinita de soluciones

5. Conclusiones

Se puede concluir que e l planteamiento de los modelos matemáticos de maximización del rendimiento, m inimización del ri esgo y los criterios para elegir una cartera de inversión nos pro porciona los resultados suficientes para seleccionar los porcentajes de compra de las acciones que forman una cartera de inversión.

Con los modelos matemáticos presentados en este trabajo que no dependen de la magnitud de las covarianzas entre los rendimientos de las acciones, nos proporcionan mas elementos reales y no estimados para tomar la decisión de que acciones seleccionar en el tiempo $t = 0$.

Los resultados nos muestran que la rest ricción de la selección del precio de venta de la acción es acertada y útil para modelar matemáticamente problemas de inversión en la Bolsa Mexicana de Valores.

Referencias

[1] Domingo Jorge Messuti , Alvarez Victor Adrián, Ro mano Graff Hugo. Selección de inversiones. Introducción a la teoría de la cartera. Buenos Aires, Argentina. Ed. Macchi. 1992. 550 pp. 135-137, 147-151, 175-187

[2] Hillier Frederick S., Lieberm an Gerald J. Introducción a la Investigación de Operaciones. Ed. Mc Graw Hill pp. 24-44

[3] Mendizábal Zubeldia Alaitz, Miera Zabalza Luis M., Zubi a Zubiaurre Marian. El modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras. Universidad del

País Vasco- Euskal Erico Unibertsitatea. http://www.ehu.es/cuadernosdegestion/documentos/212.pdf

[4] Mathur Kamlesh , S olow Daniel. Investigación de Operac iones. Ed. Prentice Hall pp.2-9 y 74-79

[5] Saavedra Ma. Luisa. Aplicación empírica del modelo Black & Scholes en México. Artículo de la revista de C ontaduría y Administración de la UNAM Num. 217, 2006

[6] Bravo Orellana Sergio. Profesor ESAN (Escuela Superior de Administración y Negocios en Li ma, Perú). Determinación de Portafolios de Activos Financieros, la Frontera E ficiente y la Línea de Mercado. http://www.esan.edu.pe/paginas/extras/paper1.pdf

[7] Krajewski Lee J., Ritzman Larry P. Adm inistración de operaciones (Estrategia y Análisis). Quinta edición, Ed. Prentice Hall México 2000, ISBN:968-444-411-7, pp. 636-663

[8] Bolsa Mexicana de Valores. http://www.bmv.com.mx

[9] José Crispín Zavala-Díaz, Vladimir Khachaturov "Programación entera, el método del árbol de cubos, su algorit mo paralelo y sus apl icaciones" Contextos en la investigación de l as Ciencias Soc iales y Administrativas, Primera edición 2006, ISBN: 968-878252-1. pp77-102.

[10] Mark L. Berenson, David M Levin e. "Estadística para Ad ministración y Economía, Conceptos y Aplicaciones". Ed. McGraw-Hill 1991 ISBN: 968-422-713-2.